SYMMETRISCHE POLYNOME UND DEREN EIGENSCHAFTEN UNTER BESONDERER BETRACHTUNG DER KOEFFIZIENTEN

Fachbereichsarbeit

Eingereicht von

ADRIAN FUCHS

Betreuer

Mag. Dr. RUPERT SODL

Bundesrealgymnasium Schloss Wagrain

VÖCKLABRUCK, 10. März 2011

Abstract

Diese Fachbereichsarbeit erwähnt und wiederholt in Kapitel 1 viele Eigenschaften und Sätze über Polynome. Dieses Kapitel baut jene mathematischen Grundlagen auf, die im Kapitel 2 benötigt werden. Dazu zählt z.B. der Begriff der Polynome in mehreren Variablen (1.5) und die Anzahl der Partitionen einer natürlichen Zahl (1.6). Kapitel 2 stellt den Hauptteil dieser Arbeit dar.

Der Kern der Arbeit ist die Newton'sche Beziehung (2.2), welche uns eine rekursive Vorschrift zur Berechnung der Koeffizienten jenes Polyoms von elementarsymmetrischen Polynomen gibt, welches der g-ten Potenzsumme identisch ist. Aus dieser rekursiven Darstellung schließen wir eine explizite (Satz 2.2.10).

Im Weiteren (2.3) befassen wir uns mit Spezialfällen, in denen die Berechnung der Koeffizienten noch einfacher wird. Abschnitt 2.4 liefert Ansätze zu interessanten, bisher ungelösten, weiterführenden Fragestellungen.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit Aufgaben, bei denen die Erkenntnisse dieser Fachbereichsarbeit zielführend sind. Im Anhang (6.1) sind die Koeffizienten der Potenzsummen bis zu s_{10} berechnet.

In chapter 1 this paper mentions many properties and theorems of polynomials, furthermore it defines polynomials in more than one variable and the number of partitions of a non-negative integer. This chapter is important to understand the main part, chapter 2.

The most important content of this paper are the Newton's identities (2.2). It gives us an implicit rule to evaluate the coefficients of the polynomial in elementary symmetric polynomials which equals a power sum. Then we create an explicit formula to evaluate the coefficients out of our implicit rule (theorem 2.2.10).

Furthermore we take a look at some special cases where the formula gets even easier (2.3). Section 2.4 deals with ideas for interesting, but yet unsolved problems.

Chapter 3 deals with some problems where the results of this paper are useful. In the appendix (6.1) you can see tables where the coefficients of the power sums are calculated up to s_{10}.

Inhaltsverzeichnis

0 Vorwort

Dass mich das Thema Polynome besonders fasziniert, ist nicht zuletzt die Schuld meines Mathematik-Olympiade Professors Mag. Heinrich Josef Gstöttner. Ich besuche seit 2003 seinen Kurs, in dem er mit Vorliebe das erzählt, was er auch beim Vorbereitungstraining für den Bundeswettbewerb der Österreichischen Mathematik-Olympiade in Raach vorträgt – Polynome. Einige Schüler des Vöcklabrucker Kurses haben sich 2009 für Raach qualifiziert und dort ein Beispiel von Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner ausgearbeitet. David Seufer-Wasserthal, ein inzwischen guter Freund von mir, hat dabei empirisch die Newton'sche Beziehung entdeckt, ohne jemals vorher davon gehört zu haben. Daraufhin war Florian Aigner fasziniert und berechnete rekursiv die Darstellung einiger Potenzsummen. Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner entdeckte dabei die Regeln 2.3.1 und 2.3.3 für die Koeffizienten.
Kann man die Darstellung von s_g allgemein berechnen?
Damit beschäftigte ich mich in den Mathematikstunden, da mich mein Mathematiklehrer Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl freistellte. Zuerst wollte ich selbst einen Beweis für die Newton'sche Beziehung finden. Daraus wurden aber nur Erkenntnisse über die Anzahl der Partitionen einer Zahl (siehe 1.6). Umso mehr verblüffte mich die Einfachheit des Beweises. Meine weiteren Erkenntnisse waren brauchbarer und sind im Abschnitt 2.2 zusammengefasst.

Beim Trainingslager des Vöcklabrucker Kurses sprach Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner über die Newton'sche Beziehung. Zu dem Zeitpunkt hatte ich bereits die Formel 2.2.9 gefunden. Ich präsentierte sie ihm als das ultimative Resultat. Seinen ungläubigen Blick werde ich nie vergessen, als ich sagte: „Ich habe eine Formel für die Berechnung aller Koeffizienten!“ Eine Woche später bat ich Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner, die Aufgabe 3.2 in seinen Übungszettel zu übernehmen. In Raach 2010 habe ich mit ihm die Formel nochmals diskutiert, und wir haben einige Beispiele berechnet. Ich habe die Aufgabe 3.2 vorgetragen. Dass Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner zur Berechnung der Koeffizienten nach dem Auflösen des Multinomialkoeffizienten alle Summanden auf einen gemeinsamen Nenner schrieb, brachte mich auf die Idee: „Lässt sich die Formel vielleicht allgemein vereinfachen?“ Nach einer halben Stunde mit Papier und Stift habe ich dann geschätzte zehn Luftsprünge gemacht und die zentrale Formel dieser Arbeit gefunden.

Den größten Dank spreche ich Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl, dem Betreuer dieser Arbeit aus. Er schlug sich Nächte um die Ohren, um die Fachbereichsarbeit voranzutreiben. Da musste sogar seine Familie warten. Genauso danke ich Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner, der diese Arbeit nicht offiziell betreut hat und sie sich nicht anschauen hätte müssen. Er hat seine Freizeit verwendet, die Arbeit zu lesen. Er hat sie sogar in den Ferien mit mir besprochen. Ohne seine vielfältigen und wertvollen Tipps hätte diese Arbeit nicht diese Form annehmen können.

Ein Dankeschön geht auch an Stephan Pfannerer und Felix Dräxler, an deren Fachbereichsarbeiten über Kombinatorische Spieltheorie bzw. über die Ungleichung von Jensen ich mich orientieren konnte. Ich danke Prof. Mag. Franz Brunner, der diese Fachbereichsarbeit besonders auf Rechtschreibung und Grammatik gelesen hat und Prof. Mag. Ute Holl-Pachler, die das Abstract korrigiert hat.

Ich danke weiters allen Leuten, die beim Gelingen dieser Fachbereichsarbeit beigetragen, diese unterstützt und erst möglich gemacht haben. Dazu gehören der Klassenvorstand Prof. Mag. Reinhard Ammer, Direktor Prof. Dipl.-Ing. MMag. Manfred Kienesberger und meine Mitschüler. Nicht zuletzt danke ich meinen Eltern, Dipl.-Ing. Dr. Heidrun Fuchs und Dipl.-Ing. Mag. Dr. Helmut Fallmann, die mir die Schulbildung ermöglichten.

Ich erkläre hiermit eidesstattlich, dass ich diese Arbeit selbst verfasst, und ausschließlich die im Literaturverzeichnis angegebene Literatur verwendet habe. Sätze und Beweise, die von mir sind, habe ich mit [F] gekennzeichnet (siehe auch Quellenverzeichnis 4). Nicht zitierte Sätze und Definitionen sind allgemein bekannt.

Vöcklabruck, 10. März 2011

1 Einführung

1.1 Polynome

Viele stetige Funktionen sind Polynomfunktionen oder lassen sich sehr gut durch Polynome annähern. Daher sind Polynome sehr nützlich und wichtig. Polynome haben viele handliche Eigenschaften, die wir in den folgenden Abschnitten behandeln werden.

Natürlich wäre es schön, Polynome allgemein für Körper zu definieren. In vielen Sätzen, beispielsweise beim Fundamentalsatz der Algebra (siehe 1.3.1), werden wir jedoch Eigenschaften von komplexen Zahlen benötigen. In $\mathbb{C}$ können wir jedenfalls die Körpereigenschaften voraussetzen. Daher werden wir uns auf die Grundmenge der komplexen Zahlen beschränken.

Definition 1.1.1 (Polynom in einer Variablen, vgl. [3], S. 1)
*Als ein **Polynom von** x bezeichnet man $P(x)$, wenn*

$$P(x) = \sum_{g=0}^{n} a_g x^g = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ werden **Koeffizienten** bei $x^0, x^1, x^2, \ldots, x^n$ des Polynoms $P(x)$ genannt.

Definition 1.1.2
$M[x]$ bezeichnet die Menge aller Polynome $P(x)$, bei denen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in M$ gilt.

Bei uns wird M immer eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ sein. Allgemein ist das nicht notwendig. In dieser Arbeit werden wir meist $M = \mathbb{C}$ meinen, wenn wir nichts diesbezüglich schreiben.

Wenn der **„führende“ Koeffizient** a_n gleich 1 ist, so bezeichnen wir $P(x)$ als ein **normiertes Polynom**.

Die einzelnen Summanden a_gx^g mit $g \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ werden **Monome** genannt. Für $n = \infty$ spricht man von unendlichen **Potenzreihen**. Manchmal werden diese fälschlicherweise auch „unendliche Polynome“ genannt.

Definition 1.1.3 (Grad eines Polynoms, vgl. [3], S. 1)
*Es bezeichnet n den **Grad** $\deg(P(x))$, wenn $a_n \neq 0$ ist.*
Wir schreiben $\deg(P(x)) = n$.

Dem Polynom $P(x) = 0 \; \forall x$ wird der Grad $-\infty$ zugewiesen. Wieso diese Zuweisung sinnvoll ist, werden wir später sehen. Man bezeichnet dieses Polynom auch als das **Nullpolynom**. Wenn $\deg(P(x)) = 0$ gilt, so spricht man von einem **konstanten Polynom**, wenn $\deg(P(x)) = 1$ ist, so spricht man von einem **linearen Polynom**, wenn $\deg(P(x)) = 2$ gilt, so spricht man von einem **quadratischen Polynom**. Bei $\deg(P(x)) = 3$ spricht man von einem **kubischen Polynom**.

Definition 1.1.4 (Identität zweier Polynome)
Wir betrachten zwei Polynome als identisch, wenn sie gleiche Grade haben und in allen Koeffizienten übereinstimmen. Wenn $P(x)$ und $Q(x)$ identisch sind, so schreiben wir $P(x) \equiv Q(x)$.

Wenn wir wissen, dass zwei Polynome identisch sind und daraus schließen, dass alle Koeffizienten gleich sind, so führen wir einen **Koeffizientenvergleich** durch.

Definition 1.1.5 (Nullstellen eines Polynoms, vgl. [3], S. 2)
Als ***Nullstelle*** *eines Polynoms $P(x)$ bezeichnen wir eine Stelle $x \in M$, bei welcher $P(x) = 0$ gilt.*

Beispiel 1.1.6
$P(x) \equiv 2x - 3$ ist ein Polynom ersten Grades (linear) von x. Da $a_0 = -3 \in \mathbb{Z}$ und $a_1 = 2 \in \mathbb{Z}$ gilt, folgt $P(x) \in \mathbb{Z}[x] \, (\subset \mathbb{Q}[x] \subset \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x])$.

Beispiel 1.1.7
$Q(x) \equiv 8{,}3$ ist ein Polynom nullten Grades (konstant) von x. Weil $a_0 = 8{,}3 \in \mathbb{Q}$ gilt, folgt $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

Beispiel 1.1.8
$R(x) \equiv x^5 + ax^4 + b^2ix^2$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ ist ein normiertes Polynom fünften Grades von x. Weil $a_0, a_1, \ldots, a_5 \in \mathbb{C}$ gilt, folgt $R(x) \in \mathbb{C}[x]$.

Keine Polynome sind zum Beispiel $f(x) = x + \frac{1}{x}$ und die Winkelfunktionen.

1.2 Rechnen mit Polynomen

Wie in der allgemeinen Literatur üblich, definieren wir Addition, Subtraktion und Multiplikation von Polynomen. Wir verwenden dabei das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz.

Addition und Subtraktion

Definition 1.2.1 (Addition und Subtraktion von Polynomen, vgl. [3], S. 2)

Sei $P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g$ ein Polynom in x vom Grad n mit den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $Q(x) \equiv \sum_{g=0}^{m} b_g x^g$ ein Polynom in x vom Grad m mit den Koeffizienten

$b_0, b_1, \ldots, b_m$. Dann ist

$$P(x) \pm Q(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g \pm \sum_{g=0}^{m} b_g x^g \equiv \sum_{g=0}^{\max(m,n)} (a_g \pm b_g) x^g$$

Wenn $n > m$ gilt, setzen wir $b_g = 0$ für $g > m$. Ist $n < m$, so setzen wir $a_g = 0$ für $g > n$.

Die Summe zweier Polynome ist also wieder ein Polynom. Der Grad der Summe der Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ ist kleiner oder gleich dem Maximum der Grade der einzelnen Polynome. Das heißt $\deg(P(x) \pm Q(x)) \leq \max(\deg(P(x)), \deg(Q(x))) = \max(n, m)$.

Multiplikation

Definition 1.2.2 (Multiplikation von Polynomen, vgl. [3], S. 2)
Sei $P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g$ ein Polynom in x vom Grad n mit den Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ und $Q(x) \equiv \sum_{g=0}^{m} b_g x^g$ ein Polynom in x vom Grad m mit den Koeffizienten $b_0, b_1, \ldots, b_m$. Dann gilt

$$P(x) \cdot Q(x) \equiv \left(\sum_{g=0}^{n} a_g x^g \right) \cdot \left(\sum_{g=0}^{m} b_g x^g \right) \equiv$$

$$\equiv a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) x^2 + \ldots +$$

$$+ \left(\sum_{h=0}^{g} a_{g-h} b_h \right) x^g + \ldots +$$

$$+ (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m) x^{n+m-1} + a_n b_m x^{n+m}$$

Das Produkt zweier Polynome ist auch ein Polynom. Auch beim Multiplizieren von Polynomen gelten das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz. Durch einfaches Nachrechnen erkennen wir, dass dieser Formel das Distributivgesetz zu Grunde liegt. Der Grad des Produkts der Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ ist $m + n$, da der Koeffizient bei x^{n+m}, der gleich $a_n b_m$ ist, sicher verschieden von Null ist.

Ein Sonderfall ist, wenn $P(x)$ oder $Q(x)$ das Nullpolynom ist. Aber auch dann ist der Grad des Produkts der Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ gleich $m + n = -\infty$. Hier sehen wir, dass es sinnvoll ist, dass wir dem Nullpolynom den Grad $-\infty$ zuweisen.

Sei $M = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ die Menge der Nullstellen von $P(x)$ und $N = \{z_1, z_2, \ldots, z_l\}$ die Menge der Nullstellen von $Q(x)$. Dann ist die Menge der Nullstellen des Produkts $P(x) \cdot Q(x)$ gleich der Vereinigungsmenge $M \cup N = \{y_1, y_2, \ldots, y_k, z_1, z_2, \ldots, z_l\}$.

Division

Wir wollen nun Polynome auch dividieren können. Bei Polynomen ist es ähnlich wie bei ganzen Zahlen, wir können nicht immer ohne Rest dividieren. Wenn wir zum Beispiel die Division $\frac{14}{3}$ ausführen, so ist das Ergebnis 4 und 2 Rest. Die Probe lautet $4 \cdot 3 + 2 = 14$. Der Rest bei der Division muss immer kleiner als der Divisor sein. Die Division ist eindeutig.

Analoges gilt auch für Polynome. Wir definieren die Division über die Probe:

Satz 1.2.3 (Division von Polynomen, vgl. [3], S. 57 ff) *Wenn $P(x)$ und $D(x)$ Polynome sind mit $\deg(D(x)) = d \leq \deg(P(x)) = n$, dann gibt es genau ein Polynom $Q(x)$ vom Grad $n-d$ und genau ein Polynom $R(x)$ mit $\deg(R(x)) < d$, sodass*

$$P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Beweis. (vgl. [11])
Wir setzen $P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g$, $D(x) \equiv \sum_{g=0}^{d} b_g x^g$, $Q(x) \equiv \sum_{g=0}^{n-d} c_g x^g$ und $R(x) \equiv \sum_{g=0}^{d-1} r_g x^g$, wobei $a_n \neq 0$, $b_d \neq 0$ und $c_{n-d} \neq 0$ gilt, aber r_{d-1} durchaus Null sein darf. Daraus ergibt sich:

$$\sum_{g=0}^{n} a_g x^g \equiv \left(\sum_{g=0}^{d} b_g x^g\right) \cdot \left(\sum_{g=0}^{n-d} c_g x^g\right) + \sum_{g=0}^{d-1} r_g x^g$$

Das ist äquivalent zu:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \equiv$$

$$\equiv (c_0 b_0 + r_0) + (c_1 b_0 + c_0 b_1 + r_1)x + (c_2 b_0 + c_1 b_1 + c_0 b_2 + r_2)x^2 + \ldots +$$

$$+(c_{n-d-1} b_0 + c_{n-d-2} b_1 + \ldots + r_{n-d-1})x^{n-d-1} + (c_{n-d} b_0 + c_{n-d-1} b_1 + \ldots)x^{n-d} + \ldots +$$

$$+(c_{n-d} b_{d-1} + c_{n-d-1} b_d)x^{n-1} + a_{n-d} b_d x^n$$

Durch Koeffizientenvergleich (Anwendung der Definition der Identität zweier Polynome) erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcllcl}
x^n: & c_{n-d} b_d & = & a_n & \iff & c_{n-d} & = & \frac{a_n}{b_d} \\
x^{n-1}: & c_{n-d-1} b_d + c_{n-d} b_{d-1} & = & a_{n-1} & \iff & c_{n-d-1} & = & \frac{a_{n-1} - c_{n-d} b_{d-1}}{b_d} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x^d: & \sum_{g=0}^{n-d} c_g b_{d-g} & = & a_d & \iff & c_0 & = & \frac{a_d - \sum_{g=1}^{n-d} c_g b_{d-g}}{b_d}
\end{array}$$

Wir haben $n-d+1$ Gleichungen und $n-d+1$ Unbekannte $c_0, c_1, \ldots, c_{n-d}$. Wir lösen dieses Gleichungssystem von oben nach unten: Aus der ersten Gleichung können wir c_{n-d} sofort berechnen. Aus der zweiten Gleichung errechnen wir c_{n-d-1}, dann c_{n-d-2} usw. bis c_0. Dadurch können wir $Q(x)$ eindeutig bestimmen. Wir erhalten durch den Koeffizientenvergleich aber noch weitere d Gleichungen:

$$\begin{array}{lrclcrcl}
x^{d-1}: & \sum_{g=0}^{n-d-1} c_g b_{d-g-1} + r_{d-1} & = & a_{d-1} & \Longleftrightarrow & r_{d-1} & = & a_{d-1} - \sum_{g=0}^{n-m-1} c_g b_{d-g-1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
x^2: & c_2b_0 + c_1b_1 + c_0b_2 + r_2 & = & a_2 & \Longleftrightarrow & r_2 & = & a_2 - c_2b_0 + c_1b_1 + c_0b_1 \\
x^1: & c_1b_0 + c_0b_1 + r_1 & = & a_1 & \Longleftrightarrow & r_1 & = & a_1 - c_1b_0 + c_0b_1 \\
x^0: & c_0b_0 + r_0 & = & a_0 & \Longleftrightarrow & r_0 & = & a_0 - b_0c_0
\end{array}$$

Auch dieses Gleichungssystem in $r_0, r_1, \ldots, r_{d-1}$ lösen wir von oben nach unten. Wir können daraus eindeutig $R(x)$ bestimmen.

□

$P(x)$ nennen wir das **Zählerpolynom** oder **Dividendenpolynom**. $D(x)$ heißt **Nennerpolynom** oder **Divisorpolynom**. $Q(x)$ nennen wir das **Quotientenpolynom** und $R(x)$ bezeichnen wir als das **Restpolynom**. Wenn $R(x) \equiv 0$, so sagen wir $D(x)$ **teilt** $P(x)$. Ansonsten **teilt** $D(x)$ **nicht** $Q(x)$.

Mit dem verallgemeinerten Horner-Schema kann man elegant Polynome dividieren, siehe auch [16].

Satz 1.2.4 (Linearfaktoren eines Polynoms, vgl. [2], S. 98)
Wenn $\hat{x}$ Nullstelle eines Polynoms $P(x)$ mit $\deg(P(x)) = n$ ist, dann gibt es ein Polynom $Q(x)$ vom Grad $n-1$, sodass

$$P(x) \equiv (x - \hat{x})Q(x)$$

gilt.

Beweis. ([F])

Um diesen Satz zu beweisen, zeigen wir, dass wir aus der Differenz $P(x) - P(\hat{x})$ immer den Faktor $(x - \hat{x})$ herausheben können.

Wenn $\hat{x}$ eine Nullstelle des Polynoms $P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g$ ist, so gilt

$$P(x) \equiv P(x) - 0 \equiv P(x) - P(\hat{x}) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g - \sum_{g=0}^{n} a_g \hat{x}^g \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g (x^g - \hat{x}^g)$$

Der erste Summand der Summe ist $a_0(x^0 - \hat{x}^0) = a_0(1-1) = 0$. Deshalb ist

$$P(x) \equiv \sum_{g=1}^{n} a_g (x^g - \hat{x}^g)$$

Durch Ausmultiplizieren können wir leicht folgende Identität nachweisen:

$$x^g - \hat{x}^g \equiv (x - \hat{x}) \cdot \left(\sum_{h=0}^{g-1} x^{g-h-1} \hat{x}^h \right) \equiv (x - \hat{x}) \cdot \left(x^{g-1} + x^{g-2}\hat{x} + x^{g-3}\hat{x}^2 + \ldots + \hat{x}^{g-1} \right)$$

Wir können $P(x)$ daher schreiben als

$$\sum_{g=1}^{n} a_g(x-\hat{x}) \cdot \left(\sum_{h=0}^{g-1} x^h \hat{x}^{g-h-1}\right) \equiv (x-\hat{x}) \cdot \sum_{g=1}^{n} a_g \left(\sum_{h=0}^{g-1} x^h \hat{x}^{g-h-1}\right) \equiv P(x)$$

Damit ist $Q(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g \left(\sum_{h=0}^{g-1} x^h \hat{x}^{g-h-1}\right)$ das Polynom vom Grad $n-1$, dessen Existenz wir nachweisen wollten.

□

Beispiel 1.2.5
Sei $P(x) \equiv x^3 + x^2 - 14x - 24$. Wir erkennen, dass $x = 4$ eine Nullstelle von $P(x)$ ist. Es ist nämlich $P(4) = 64 + 16 - 56 - 24 = 0$. Es muss also $P(x)$ durch $(x-4)$ teilbar sein. Dazu schreiben wir:

$$\begin{aligned}
P(x) &\equiv x^3 + x^2 - 14x - 24 \\
&\equiv (x^3 - 4^3) + (x^2 - 4^2) - 14(x-4) - 24(1-1) \\
&\equiv (x-4) \cdot (x^2 + 4x + 4^2) + (x-4) \cdot (x+4) - 14(x-4) \\
&\equiv (x-4) \cdot (x^2 + (4+1)x + (4^2 + 4 - 14)) \\
&\equiv (x-4) \cdot (x^2 + 5x + 6)
\end{aligned}$$

1.3 Fundamentalsatz der Algebra

Ein sehr wesentlicher und allgemein bekannter Satz für unsere weiteren Überlegungen über Polynome ist der Fundamentalsatz der Algebra. Er stellt für uns im Komplexen sicher, dass wir auch tatsächlich Nullstellen von Polynomen finden können.

Satz 1.3.1 (Fundamentalsatz der Algebra, [2], S. 205)
Jedes Polynom P: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt mindestens eine Nullstelle.

Beweis. (vgl. [2], S. 208)

Eigentlich benötigt der folgende Beweis die Definition von kompakten Mengen. Wir müssen wissen, dass Polynome sowie die Betragsfunktion stetig sind und dass ein globales Minimum existiert, wenn es ein globales Infimum gibt. Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra baut auf vielen Eigenschaften stetiger Funktionen auf. Aus Gründen einer besseren Lesbarkeit und weil diese Arbeit einen anderen Schwerpunkt hat, verwenden wir diese Sachverhalte ohne Beweis. Zudem sind viele der oben genannten Eigenschaften mathematisches Allgemeinwissen.

Sei $P(x) \equiv \sum_{h=0}^{n} a_h x^h$ ein Polynom in komplexen Zahlen ($a_h \in \mathbb{C}$) vom Grad $n \geq 1$. Wir teilen das Polynom durch den führenden Koeffizienten a_n. Diese Operation verändert sicher nichts an den Nullstellen.

Wir beweisen indirekt, dass das Polynom eine Nullstelle haben muss. Dazu nehmen wir nun an, dass $P(x)$ keine Nullstelle habe.

Sei nun $f(x) = |P(x)|\ \forall x$. Die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig, da das Polynom $P(x)$ und die Betragsfunktion stetig sind.

Lemma 1.3.2 *Es gibt eine Zahl $C \in \mathbb{R}^+$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$, die betragsmäßig größer als C sind, die Ungleichung $f(z) > f(0)$ gilt.*

Beweis des Lemmas.

Wir setzen $C = \max\{1, (2f(0))^{\frac{1}{n}}, 2\sum_{h=0}^{n-1} |a_h|\}$. Sei nun $|z| \geq C$. Wir beweisen das Lemma durch ein paar Abschätzungen:

$$f(z) = \left| z^n + \sum_{h=0}^{n-1} a_h |z|^h \right| = |z|^n \left| 1 + \sum_{h=0}^{n-1} a_h |z|^{h-n} \right|$$

Aus der Dreiecksungleichung $\left|\sum_{h=0}^{n-1} a_h\right| \leq \sum_{h=0}^{n-1} |a_h|$ folgt

$$f(z) \geq |z|^n \left(1 - \sum_{h=0}^{n-1} |a_h| |z|^{h-n} \right) = |z|^n \left(1 - \frac{1}{|z|} \sum_{h=0}^{n-1} \frac{|a_h|}{|z|^{n-h-1}} \right)$$

Weil $|z| \geq 1$, ist dieser Ausdruck größer oder gleich

$$|z|^n \left(1 - \frac{1}{|z|} \sum_{h=0}^{n-1} |a_h| \right)$$

Aufgrund von $|z| \geq 2\sum_{h=0}^{n-1} |a_h|$ können wir diesen Ausdruck wiederum folgendermaßen abschätzen:

$$|z|^n \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{|z|^n}{2}$$

Dieser Term ist größer oder gleich $f(0)$, da $|z| \geq (2f(0))^{\frac{1}{n}}$

□

Wegen der Gültigkeit des Lemmas muss das globale Minimum der stetigen Funktion $f(x)$, das es sicher gibt, da $f(x)$ nach unten beschränkt ist, im Kreis mit dem Radius $|z|$ und Mittelpunkt 0 in der komplexen Zahlenebene angenommen werden. Dieser Kreis ist eine kompakte Menge. Sei $\hat{z}$ eine Stelle, sodass $f(\hat{z})$ minimal ist. Da laut Annahme $P(x)$ keine Nullstelle besitzt, ist $f(x) = |P(x)| > 0$ für alle x.

Wir schreiben nun das Polynom $P(x)$ um.

Lemma 1.3.3 (Entwicklung eines Polynoms um eine Stelle, vgl. [2], S. 95) *Für jedes Polynom $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ und für jedes $c \in \mathbb{C}$ gibt es ein eindeutiges Polynom $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $\deg(P(x)) = \deg(Q(x))$, sodass*

$$P(x) \equiv Q(x - c)$$

Beweis des Lemmas. (vgl. [2], S. 95)

Sei $P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g$ und $Q(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} b_g x^g$. Es ist

$$\sum_{g=0}^{n} a_g x^g \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g (x - c + c)^g$$

Laut binomischem Lehrsatz gilt

$$P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g \sum_{h=0}^{g} \binom{g}{h} c^{g-h}(x-c)^h$$

Alle Summen sind endlich. Daher dürfen wir die Summationsreihenfolge vertauschen. Da $\binom{g}{h} = 0$ für $h > g$ gilt, ist $\sum_{h=0}^{g} \binom{g}{h} = \sum_{h=0}^{n} \binom{g}{h}$. Daraus folgt:

$$P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} \sum_{h=0}^{n} a_g \binom{g}{h} c^{g-h}(x-c)^h \equiv \sum_{h=0}^{n} \left(\sum_{g=0}^{n} a_g \binom{g}{h} c^{g-h} \right) (x-c)^h$$

Mittels Koeffizientenvergleich können wir die gesuchten Koeffizienten des Polynoms $Q(x)$ bestimmen:

$$b_h = \sum_{g=0}^{n} a_g \binom{g}{h} c^{g-h}$$

□

Sei $B(x)$ ein Polynom, sodass

$$P(x-\hat{z}) \equiv B(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} b_i(x^g - \hat{z}) \equiv b_0 + \sum_{g=k}^{n} (x^g - \hat{z})$$

Der Parameter k ist so gewählt, dass $b_k \neq 0$. Dieses k muss natürlich die Ungleichung $1 \leq k \leq n$ erfüllen, da sonst die Summe nicht sinnvoll wäre. Da $n \geq 1$ ist, gibt das sicher keine Probleme.

Laut unserer Annahme ist $P(\hat{z}) = B(0) \neq 0$. Daher ist $b_0 \neq 0$.

Weil wir über die Existenz der k-ten Wurzeln komplexer Zahlen bescheid wissen, gibt es ein t derart, dass $t^k = \frac{b_0}{b_k}$. Wir betrachten nun $P(\hat{z} + \varepsilon t)$ für ein $\varepsilon > 0$ und formen um:

$$\begin{aligned}
P(\hat{z} + \varepsilon t) &\equiv b_0 + \sum_{g=k}^{n} b_g(\varepsilon t)^g \equiv b_0 + \varepsilon^k b_k t^k + \sum_{g=k+1}^{n} b_g(\varepsilon t)^g \\
&\equiv b_0 - \varepsilon^k b_0 + \varepsilon^k b_0 \left(\sum_{g=k+1}^{n} \frac{b_g}{b_0} \varepsilon^{g-k} t^g \right) \\
&\equiv b_0 \left(1 - \left(\sum_{g=k+1}^{n} \frac{b_g}{b_0} \varepsilon^{g-k} t^g \right) \right)
\end{aligned}$$

In jedem Term der Summe $\sum_{g=k+1}^{n} \frac{b_g}{b_0} \varepsilon^{g-k} t^g$ kommt ε zumindest zur ersten Potenz vor. Wenn wir also ε klein genug wählen, so gilt

$$\left| \sum_{g=k+1}^{n} \frac{b_g}{b_0} \varepsilon^{g-k} t^g \right| \leq \frac{1}{2}$$

Daher gilt folgende Ungleichungskette:

$$f(\hat{z}+\varepsilon t) = |P(\hat{z}+\varepsilon t)| \leq |b_0| \left(1 - \frac{\varepsilon^k}{2}\right) < |b_0| = |P(\hat{z})| = f(\hat{z})$$

Diese Aussage steht aber im Widerspruch dazu, dass $\hat{z}$ eine Minimalstelle von f ist. Damit ist der Fundamentalsatz der Algebra 1.3.1 bewiesen.

□

1.4 Linearfaktoren und Satz von Vieta

Betrachten wir nun ein Polynom

$$P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g$$

mit $n \geq 1$. Laut Fundamentalsatz der Algebra hat das Polynom mindestens eine Nullstelle. Nennen wir diese x_1. Laut Satz 1.2.4 können wir $P(x)$ schreiben als

$$P(x) \equiv (x - x_1)Q(x)$$

Dabei hat $Q(x)$ den Grad $n-1$. Falls $n-1 \geq 1$ ist, so hat laut Fundamentalsatz der Algebra $Q(x)$ wiederum mindestens eine Nullstelle, nennen wir sie x_2. Wir können weiters $P(x) \equiv (x - x_1)Q(x)$ als

$$P(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)R(x)$$

schreiben, wenn nun der Grad von $R(x)$ gleich $n-2$ ist. Diese Argumentation können wir so oft durchführen, solange der Grad des Quotientenpolynoms mindestens 1 ist. Also ist

$$P(x) \equiv (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\cdots(x - x_n)C \equiv C \prod_{g=1}^{n}(x - x_g)$$

C ist ein konstantes Polynom (von x). Wir nennen diese Darstellung von P die **Produktform**. Ein Term $(x-x_h)$ mit $1 \leq h \leq n$ heißt **Linearfaktor** des Polynoms $P(x)$.

Offensichtlich sind $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die Nullstellen des Polynoms P. P hat also n, nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen. Daraus resultiert folgendes

Korollar 1.4.1 (vgl. [11])
Hat ein Polynom $P(x)$ mit $\deg(P(x)) \leq n$ mehr als n Nullstellen, so muss es das Nullpolynom sein.

Aufgrund des bisher Gezeigten können wir nun folgenden wichtigen Satz über Polynome beweisen, der in dieser Arbeit aber nur eine untergeordnete Rolle spielt:

Satz 1.4.2 (Identitätssatz, vgl. [11])
Wenn zwei Polynome gleichen Grad n haben und an mindestens $n+1$ paarweise verschiedenen Stellen übereinstimmen, so sind sie identisch.

Beweis. (vgl. [11])
Wenn der Grad der beiden Polynome $P(x)$ und $Q(x)$ kleiner oder gleich n ist und $P(x) = Q(x)$ an mindestens $n+1$ Stellen gilt, so hat die Differenz $D(x) \equiv P(x) - Q(x)$ auch einen Grad kleiner oder gleich n und mindestens $n+1$ Nullstellen. Daher ist $D \equiv 0$. Daraus folgt, dass die Polynome P und Q identisch sind.

□

Da die Nullstellen eines Polynoms eindeutig sind, ist auch die Zerlegung in Linearfaktoren bis auf die Reihenfolge eindeutig. Wenn das Polynom P die Nullstellen $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ besitzt und es gilt $x_{h_1} = x_{h_2} = \ldots = x_{h_k} = a$ mit paarweise verschiedenen Indizes $1 \leq h_1, h_2, \ldots, h_k \leq n$, so bezeichnen wir a als **k-fache Nullstelle** von P.

Wenn wir die Produktform von $P(x)$ ausmultiplizieren und das Polynom anschließend normieren, erhalten wir

$$\frac{P(x)}{C} \equiv x^n - (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)x^{n-1} +$$
$$(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots x_{n-1}x_n)x^{n-2} +$$
$$x^{n-3}(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) + \ldots + x_1x_2 \cdots x_n$$

Der Koeffizientenvergleich führt uns auf den folgenden Satz:

Satz 1.4.3 (Satz von Vieta)
Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ die (nicht notwendigerweise verschiedenen) Nullstellen des Polynoms $P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} a_g x^g$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= C = Cp_0 \\
a_{n-1} &= -C(x_0 + x_1 + \ldots + x_n) = -Cp_1 \\
a_{n-2} &= C(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_n + x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_2x_n + \ldots + x_{n-1}x_n) = Cp_2 \\
a_{n-3} &= -C(x_1x_2x_3 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n) = -Cp_3 \\
&\vdots \\
a_0 &= (-1)^n C(x_1x_2x_3 \cdots x_n) = (-1)^n Cp_n
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ bezeichnen wir als **elementarsymmetrische Polynome**. Wir werden sie in Kapitel 2 exakt definieren.

1.5 Polynome in mehreren Variablen

Wir verallgemeinern den Begriff der Polynome und definieren Polynome in mehreren Variablen:

Definition 1.5.1 (Polynome in mehreren Variablen, vgl. [3], S. 25)
Als ein ***Polynom von*** $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *bezeichnet man* $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, *wenn*

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \sum_{g_1=0}^{n_1} \sum_{g_2=0}^{n_2} \ldots \sum_{g_k=0}^{n_k} a_{g_1,g_2,\ldots,g_k} \prod_{h=1}^{k} x_h^{g_h}$$

mit $a_{g_1,g_2,\ldots,g_k} \in \mathbb{C} \wedge n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$

Die einzelnen Summanden $a_{g_1,g_2,\ldots,g_k} \prod_{h=1}^{k} x_h^{g_h}$ nennen wir wieder **Monome**. Diese Definition ist sehr abstrakt. Wir wollen sie anhand eines Beispiels besser verständlich machen.

Beispiel 1.5.2

$$P(x, y, z) \equiv x^2 + 3xyz - 5xz + 10y^2 - 1$$

In diesem Beispiel kommen x und y quadratisch vor, also ist $n_1 = n_2 = 2$. Die Variable z kommt nur linear vor, also ist $n_3 = 1$. Die Summen erzeugen uns 18 Monome:

$$\begin{array}{lllllll} P(x,y,z) & \equiv a_{0,0,0} & +a_{0,0,1}z & +a_{0,1,0}y & +a_{0,1,1}yz & +a_{0,2,0}y^2 & +a_{0,2,1}y^2z \\ & +a_{1,0,0}x & +a_{1,0,1}xz & +a_{1,1,0}xy & +a_{1,1,1}xyz & +a_{1,2,0}xy^2 & +a_{1,2,1}xy^2z \\ & +a_{2,0,0}x^2 & +a_{2,0,1}x^2z & +a_{2,1,0}x^2y & +a_{2,1,1}x^2yz & +a_{2,2,0}x^2y^2 & +a_{2,2,1}x^2y^2z \end{array}$$

Genau 13 der Koeffizienten haben den Wert Null. Nur die fünf Koeffizienten $a_{2,0,0}, a_{1,1,1}, a_{1,0,1}, a_{0,2,0}$ und $a_{0,0,0}$ sind verschieden von Null.

Die Identität von Polynomen in mehreren Variablen haben wir hier schon verwendet, ohne sie zu definieren. Auch den Grad eines Polynoms in mehreren Variablen haben wir bis jetzt nur empirisch verwendet.

Definition 1.5.3 (Grad eines Monoms in mehreren Variablen)
Der ***Grad eines Monoms*** *entspricht der Summe der Exponenten der Variablen.*

$$\deg\left(a_{g_1,g_2,\ldots,g_k} \prod_{h=1}^{k} x_h^{g_h}\right) = \sum_{h=1}^{k} g_h$$

Definition 1.5.4 (Grad eines Polynoms in mehreren Variablen, vgl. [3], S. 25)
Der ***Grad eines Polynoms*** *in mehreren Variablen entspricht dem Maximum der Grade der einzelnen Monome.*

Analog zu Polynomen in einer Variablen definieren wir:

Definition 1.5.5 (Identität zweier Polynome in mehreren Variablen)
Polynome in mehreren Variablen sind ***identisch****, wenn sie gleiche Grade haben und in allen Koeffizienten übereinstimmen. Wenn* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *und* $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *identisch sind, so schreiben wir* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Wir können Polynome in mehreren Variablen auch als Polynome in einer Variablen auffassen. Wir betrachten das Polynom in einer Variablen x_l mit $1 \leq l \leq k$. Alle anderen Variablen betrachten wir als Parameter. Die Summationsreihenfolge können wir beliebig ändern, da alle Summen endlich sind. So stellen wir die Summe, die über g_l läuft, nach vorne. Wir erhalten:

$$P(x_l) \equiv \sum_{g_l=0}^{n_l} \left(\sum_{g_1=0}^{n_1} \sum_{g_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{g_{l-1}=0}^{n_{l-1}} \sum_{g_{l+1}=0}^{n_{l+1}} \cdots \sum_{g_k=0}^{n_k} a_{g_1,g_2,\ldots,g_k} \prod_{h=1}^{k} x_h^{i_h} \right)$$

Da nun in der Klammer alle Ausdrücke die gleiche Potenz von $x_l^{g_l}$ haben, können wir $x_l^{g_l}$ herausheben. Wir erhalten:

$$P(x_l) \equiv \sum_{g_l=0}^{n_l} x_l^{g_l} \left(\sum_{g_1=0}^{n_1} \sum_{g_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{g_{l-1}=0}^{n_{l-1}} \sum_{g_{l+1}=0}^{n_{l+1}} \cdots \sum_{g_k=0}^{n_k} a_{g_1,g_2,\ldots,g_k} \prod_{h=1;h\neq l}^{k} x_h^{g_h} \right)$$

In der Klammer kommt x_l nicht mehr vor. Wir setzen deshalb

$$b_{g_l} = \sum_{g_1=0}^{n_1} \sum_{g_2=0}^{n_2} \cdots \sum_{g_{l-1}=0}^{n_{l-1}} \sum_{g_{l+1}=0}^{n_{l+1}} \cdots \sum_{g_k=0}^{n_k} a_{g_1,g_2,\ldots,g_k} \prod_{h=1;h\neq l}^{k} x_h^{g_h}$$

Damit können wir $P(x_l)$ in der gewohnten Form

$$P(x_l) \equiv \sum_{g_l=0}^{n_l} b_g x_l^{g_l}$$

mit den Koeffizienten b_{g_l} schreiben.

Da wir Polynome in mehreren Variablen auf Polynome in einer Variablen reduzieren können, so schreiben wir $P(x_l) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Sind P und Q identisch, so ist es egal, welche Variablen man dazu betrachtet. Die Identitätsdefinition in mehreren Variablen verträgt sich also mit der in einer Variablen. Sohin erlauben wir uns auch ohne Beweis alle Definitionen (bis auf den Grad), Sätze und Rechenregeln, die im Wesentlichen nur die Anwendung von Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz sind, von Polynomen in einer Variablen zu übernehmen. Weiters folgen noch zwei Definitionen, die bei Polynomen in einer Variablen weniger sinnvoll sind.

Definition 1.5.6 (Homogene Polynome, vgl. [8])
Das Polynom $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ heiße ***homogen in den Variablen*** *$x_1, x_2, \ldots, x_k$* ***vom Grad*** *g, wenn für alle $x_1, x_2, \ldots, x_k, t$ gilt:*

$$P(tx_1, tx_2, \ldots, tx_k) = t^g P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$$

bzw. wenn alle Monome den gleichen Grad (nämlich g) haben.

Homogene Polynome in einer Variablen n-ten Grades sind also nur jene Polynome, die nur aus einem Monom bestehen, also die Form $a_n x^n$ haben.

Homogene Polynome mit den Graden eins, zwei und drei, können wir geometrisch veranschaulichen, indem wir den Variablen eine Einheit (z.B. Meter) geben. Bei linearen homogenen Polynomen handelt es sich dann um Strecken, bei quadratischen um Flächen und bei kubischen um Volumina.

Definition 1.5.7 (Symmetrische Polynome, vgl. [3], S. 25)
*Sei $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ ein Polynom. $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ wird als **symmetrisch in den Variablen** $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bezeichnet, wenn $P(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv P(y_1, y_2, \ldots, y_k)$ für jede Permutation $\langle y_1, y_2, \ldots, y_k \rangle$ von $\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$.*

Offensichtlich sind alle Polynome in einer Variable symmetrisch.

Beispiel 1.5.8
Das Polynom $P(x, y, z) \equiv 7x^2y - 2xyz + z^3 - 3$ ist linear in y, quadratisch in x und kubisch in z. Insgesamt ist es ebenfalls kubisch. Die Grade des Polynoms in den Variablen sind nicht alle gleich, also kann das Polynom kein symmetrisches Polynom sein. Das Polynom ist auch nicht homogen, da nicht alle Monome den gleichen Grad haben.

Beispiel 1.5.9
Das Polynom $Q(x, y, z) \equiv 3x + 3y - xy + z$ ist linear in x, y, z. Insgesamt ist es jedoch quadratisch, da das Monom $-xy$ quadratisch ist. Das Polynom ist nicht symmetrisch, da $Q(x, y, z) \not\equiv Q(z, y, x)$. Das Polynom ist nicht homogen, da das Monom $-xy$ vom Grad 2 ist, das Monom z aber nur vom Grad 1.

Beispiel 1.5.10
Das Polynom $R(x, y, z) \equiv xy + yz + zx$ ist symmetrisch und linear in x, y, z, da $R(x, y, z) \equiv R(x, z, y) \equiv R(y, x, z) \equiv R(y, z, x) \equiv R(z, x, y) \equiv R(z, y, x)$. Insgesamt ist dieses Polynom quadratisch und homogen.

Beispiel 1.5.11
Das Polynom $T(x, y) \equiv 3x + 3y - x^2y^2 + 2$ ist symmetrisch und quadratisch in x, y, da $T(x, y) \equiv T(y, x)$. Das Monom 2 ist konstant, x^2y^2 vom Grad 4, daher ist T nicht homogen. Insgesamt ist $\deg(T(x, y)) = 4$

1.6 Partitionen

Um Verwechslungen mit dem Additionsoperator vorzubeugen, verwende ich die unübliche, aber leichter verständliche Schreibweise $\hat{+}$ statt $+$ als Trennzeichen der Zahlen, wenn wir Partitionen anschreiben.

Definition 1.6.1 (Partition einer positiven ganzen Zahl, vgl. [1], S. 6 ff)
*Als **Partition** $a_1 \hat{+} a_2 \hat{+} \ldots \hat{+} a_l$ einer positiven ganzen Zahl n bezeichnet man eine Zerlegung von n in l Summanden $a_1, a_2, \ldots, a_l$, sodass die Summe $\sum_{i=1}^{l} a_i = n$ ergibt und $l, a_1, a_2, \ldots, a_l \in \mathbb{N}^*$*

Wenn wir Partitionen betrachten, spielt die Zahl Null eine Sonderrolle. Wir können sie mit der obigen Definition nicht erfassen. Für unsere weiteren Überlegungen wird es trotzdem sinnvoll sein, eine Partition von Null zu definieren.

Definition 1.6.2 (Partitionen von Null, vgl. [1], S. 6 ff)
Die Zahl Null hat genau eine Partition, die wir die leere Partition nennen.

Definition 1.6.3 (Gleichheit von Partitionen, vgl. [1], S. 6 ff)
Zwei Partitionen $a_1\hat{+}a_2\hat{+}\ldots\hat{+}a_l$ *und* $b_1\hat{+}b_2\hat{+}\ldots\hat{+}b_l$ *werden als **gleich** betrachtet, wenn* $\langle a_1, a_2, \ldots, a_l\rangle$ *eine Permutation von* $\langle b_1, b_2, \ldots, b_l\rangle$ *ist.*

Im Weiteren betrachten wir nur noch geordnete Partitionen. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_l$ ist. Weiters ordnen wir Partitionen einer Zahl n „lexikographisch". Seien $A = a_1\hat{+}a_2\hat{+}\ldots\hat{+}a_l$ und $B = b_1\hat{+}b_2\hat{+}\ldots\hat{+}b_l$ zwei verschiedene Partitionen von n. A heiße **früher** als B (und B **später** als A), wenn $a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge (a_2 < b_2 \vee (a_2 = b_2 \wedge (a_3 < b_3 \vee (a_3 = b_3 \wedge (\ldots))))))$. Ansonsten heiße A später als B (und B früher als A).

Beispiel 1.6.4
$3\hat{+}2\hat{+}2$ *ist früher als* $4\hat{+}2\hat{+}1$*, da* $a_1 = 3 < b_1 = 4$

$3\hat{+}2\hat{+}2$ *ist später als* $3\hat{+}2\hat{+}1\hat{+}1$*, da* $a_1 = b_1 = 3, a_2 = b_2 = 2, a_3 = 2 > b_3 = 1$

Definition 1.6.5 (Anzahl der Partitionen, [F])
Bezeichne $\mathrm{part}(n)$ *die Anzahl der Partitionen von* n*.*

In der Tabelle 1.1 sehen wir einige positive ganze Zahlen und deren Partitionen.

Tabelle 1.1: Partitionen

n	Partitionen von n	$\mathrm{part}(n)$
0	„die leere Partition"	1
1	1	1
2	$1\hat{+}1$, 2	2
3	$1\hat{+}1\hat{+}1$, $2\hat{+}1$, 3	3
4	$1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1$, $2\hat{+}1\hat{+}1$, $2\hat{+}2$, $3\hat{+}1$, 4	5
5	$1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1$, $2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1$, $2\hat{+}2\hat{+}1$, $3\hat{+}1\hat{+}1$, $3\hat{+}2$, $4\hat{+}1$, 5	7
6	$1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1$, …, 6	11

Definition 1.6.6 (Anzahl der Partitionen, wo maximal k vorkommt, [F])
Es bezeichnet $\mathrm{part}_k(n)$ *die Anzahl der Partitionen* $a_1\hat{+}a_2\hat{+}\ldots\hat{+}a_l$ *von* n*, für die gilt* $k \geq a_1$ $(\geq a_2 \geq \ldots \geq a_l)$*.*

In einer Partition von n kann maximal die Zahl n auftreten.
Daher ist $\mathrm{part}(n) = \mathrm{part}_k(n)$ für $k \geq n$.

Definition 1.6.7 ([F]) *Es stellt sich als sinnvoll heraus, die Anzahl der Partitionen von negativen Zahlen als Null zu definieren. Wir definieren* $\mathrm{part}(n) = \mathrm{part}_k(n) = 0$ *für* $n < 0$*.*

Beispiel 1.6.8
$\mathrm{part}_3(5) = 5$*, wir zählen die Partitionen* $3\hat{+}2$, $3\hat{+}1\hat{+}1$, $2\hat{+}2\hat{+}1$, $2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1$, $1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1$.
$\mathrm{part}_5(3) = \mathrm{part}(3) = 3$*, da* $5 \geq 3$
$\mathrm{part}_4(-1) = 0$*, da es von negativen Zahlen keine Partitionen gibt.*

Wir wollen nun allgemein $\mathrm{part}_k(n)$ abzählen. Dazu werden wir einige Eigenschaften über Partitionen entdecken und diese beweisen, um schlussendlich im Satz 1.6.14 eine allgemeine Formel für die Anzahl der Partitionen zu haben.

Zuerst bemerken wir, dass wir für $k = 1$ genau eine Partition haben: $\underbrace{1\hat{+}1\hat{+}\ldots\hat{+}1}_{n \text{ viele}}$.

Daraus erkennen wir das folgende

Lemma 1.6.9 ([F])

$$\mathrm{part}_1(n) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nun zeigen wir eine weitere Eigenschaft, nämlich

Lemma 1.6.10 ([F])

$$\mathrm{part}_k(n) = \mathrm{part}_{k-1}(n) + \mathrm{part}_k(n-k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$$

Beweis. ([F])

Sei $A = a_1\hat{+}a_2\hat{+}\ldots\hat{+}a_l$ eine Partition, die wir mit $\mathrm{part}_k(n)$ abzählen. Sei weiters $A' = a_2\hat{+}a_3\hat{+}\ldots\hat{+}a_l$. Nun folgt $A = a_1\hat{+}A'$. Es muss $a_1, a_2, \ldots, a_l \leq k$ sein. Wenn $a_1 < k$ ist, so ist A auch in der Menge aller Partitionen, die mit $\mathrm{part}_{k-1}(n)$ abgezählt werden. Wenn $a_1 = k$ ist, so ist $a_2+a_3+\ldots+a_l = n-k$. Damit ist A' eine Partition, die mit $\mathrm{part}_k(n-k)$ abgezählt wird.

□

Beispiel 1.6.11
$\mathrm{part}_3(5) = \mathrm{part}_2(5) + \underbrace{\mathrm{part}_3(5-3)}_{\mathrm{part}(2)} = 3 + 2 = 5$

Wir können in das Lemma 1.6.10 für n den Wert $n-k$ einsetzen und erhalten: $\mathrm{part}_k(n-k) = \mathrm{part}_{k-1}(n-k) + \mathrm{part}_k(n-2k)$.
Also ist $\mathrm{part}_k(n) = \mathrm{part}_{k-1}(n) + \mathrm{part}_{k-1}(n-k) + \mathrm{part}_k(n-2k)$

Diesen Schritt können wir beliebig oft wiederholen. Da es keine Partitionen von negativen Zahlen gibt, gilt für ein natürliches g mit $n - gk < 0$ die Gleichung $\mathrm{part}_k(n-gk) = \mathrm{part}_{k-1}(n-gk) = 0$. Die Ungleichung $n - gk < 0$ können wir zu $g > \frac{n}{k}$ umformen. Wir erhalten folgendes

Lemma 1.6.12 ([F])

$$\mathrm{part}_k(n) = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{part}_{k-1}(n-gk) = \sum_{g=0}^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \mathrm{part}_{k-1}(n-gk) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$$

Der Ausdruck $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist.

Beispiel 1.6.13
$\mathrm{part}_3(5) = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{part}_2(5-3g) = \mathrm{part}_2(5) + \mathrm{part}_2(2) + \mathrm{part}_2(-1) + \ldots =$
$3 + 2 + 0 + \ldots = 5$

Damit können wir $\mathrm{part}_k(n)$ durch Ausdrücke der Art $\mathrm{part}_{k-1}(z)$ mit passendem $z \in \mathbb{N}$ anschreiben. Setzen wir in Lemma 1.6.12 für k den Wert $k-1$ und anschließend für n den Wert $n-hk$ ein, so erhalten wir: $\mathrm{part}_{k-1}(n) = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{part}_{k-2}(n-g(k-1)) = \sum_{g=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k-1} \right\rfloor} \mathrm{part}_{k-2}(n-g(k-1))$ und $\mathrm{part}_{k-1}(n-hk) = \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{part}_{k-2}(n-hk-g(k-1)) = \sum_{g=0}^{\left\lfloor \frac{n-hk}{k-1} \right\rfloor} \mathrm{part}_{k-2}(n-hk-g(k-1)) \Longrightarrow \mathrm{part}_k(n) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \mathrm{part}_{k-2}(n-hk-g(k-1)) = \sum_{h=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \sum_{g=0}^{\left\lfloor \frac{n-hk}{k-1} \right\rfloor} \mathrm{part}_{k-2}(n-hk-g(k-1))$

Kurz gesagt, wir schreiben $\mathrm{part}_k(n)$ mit Ausdrücken der Art $\mathrm{part}_{k-2}(z)$ an. Diesen Schritt können wir so oft wiederholen, bis wir $\mathrm{part}_k(n)$ durch $\mathrm{part}_1(z)$ ausdrücken. Laut 1.6.9 ist $\mathrm{part}_1(z) = 1$ für alle natürlichen z und wir kommen zu dem

Satz 1.6.14 ([F])

$$\mathrm{part}_k(n) = \sum_{g_1=0}^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \sum_{g_2=0}^{\left\lfloor \frac{n-kg_1}{k-1} \right\rfloor} \sum_{g_3=0}^{\left\lfloor \frac{n-kg_1-(k-1)g_2}{k-2} \right\rfloor} \cdots \sum_{g_{k-1}=0}^{\left\lfloor \frac{n-kg_1-(k-1)g_2-\ldots-3g_{k-2}}{2} \right\rfloor} \underbrace{1}_{\mathrm{part}_1(z)}$$

Wenn wir $\mathrm{part}(n)$ abzählen wollen, müssen wir $k = n$ einsetzen.

Diese explizite „Formel“ für die Anzahl der Partitionen erscheint vielleicht auf den ersten Blick durchaus brauchbar. Der Berechnungsalgorithmus, der durch die Summen vorgeschrieben wird, zählt die Partitionen einer Zahl einzeln ab und ist daher sehr mühsam und langsam. (vgl. [12])

2 Darstellung der Potenzsummen mittels elementarsymmetrischer Polynome

2.1 Elementarsymmetrische Polynome

Als g-tes elementarsymmetrisches Polynom p_g in (mehreren Variablen) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verstehen wir eine Aufsummierung aller Produkte, die sich aus g paarweise verschiedenen Variablen aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zusammensetzen, wobei der Wert der Variablen durchaus gleich sein darf. Das ist natürlich nur für diese g sinnvoll, die kleiner oder gleich n sind, sonst haben wir nicht ausreichend viele Variablen, die wir zusammenmultiplizieren können. Wir sagen also p_g sei 0 für $g > n$. Diese umständlich klingende verbale Definition formulieren wir auch folgendermaßen:

Definition 2.1.1 (Elementarsymmetrische Polynome, vgl. [4], S. 47)
Als g-tes elementarsymmetrisches Polynom p_g in den n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen wir

$$p_g \equiv p_g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{1 \leq h_1 < h_2 < \ldots < h_g \leq n} x_{h_1} x_{h_2} \cdots x_{h_g}$$

Für $g > n$ setzen wir $p_g \equiv 0$.

Elementarsymmetrische Polynome können wir auch als symmetrische Summe ohne Wiederholung schreiben:

$$p_g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{sym^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)} x_1 x_2 \cdots x_g$$

Beispiel 2.1.2

$$\begin{array}{rcl}
p_0(a,b,c,d) & = & 1 \\
p_1(a,b,c,d) & = & a+b+c+d \\
p_2(a,b,c,d) & = & ab+ac+ad+bc+bd+cd \\
p_3(a,b,c,d) & = & abc+abd+acd+bcd \\
p_4(a,b,c,d) & = & abcd \\
p_5(a,b,c,d) & = & 0
\end{array}$$

Das g-te elementarsymmetrische Polynom ist also die Summe aller Produkte der Permutationen von g Variablen aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Elementarsymmetrische Polynome sind also spezielle symmetrische Polynome. Der Grad jedes einzelnen Monoms $x_{h_1} x_{h_2} \cdots x_{h_g}$ ist g. Das elementarsymmetrische Polynom p_g ist daher homogen vom Grad g, wenn $g < n$.

In den Abbildungen 2.1, 2.2 bzw. 2.3 auf Seite 19 sehen wir eine graphische Veranschaulichung von $p_1(a, b, c, d)$, $p_2(a, b, c, d)$ bzw. $p_3(a, b, c, d)$.

Satz 2.1.3 (Hauptsatz über symmetrische Polynome, vgl. [4], S. 53)
Für jedes symmetrische Polynom $P \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom (von elementarsymmetrischen Polynomen) $E(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$, so dass

$$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv E(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, \ldots, x_n))$$

gilt. Dabei enthält $E(y_1, \ldots, y_n)$ nur Terme $y_1^{g_1} y_2^{g_2} \cdots y_n^{g_n}$ mit einem Grad $g_1 + 2g_2 + \ldots + ng_n \leq \deg(P)$. Ist P homogen, so hat E nur Terme vom Grad $\deg(P)$.

Beweis. (vgl. [4], S. 53 f)
Sei $\deg(P(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = m$. Wir teilen die Monome in $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entsprechend ihrem Grad auf $P_0(x_1, x_2, \ldots, x_n), P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, P_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auf. Diese Polynome sind homogen und haben die Grade $0, 1, \ldots, m$. Wenn wir für jedes homogene symmetrische Polynom die Behauptung von Satz 2.1.3 zeigen, dann ist der Satz bewiesen. Wir beschränken uns also auf homogene symmetrische Polynome.

Beweis durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Variablen n:

Basis: $n = 1$. In diesem Fall ist $p_1(x) = x$ offensichtlich. $p_g = 0 \quad \forall \quad g > 1$

Induktionsannahme: Jedes homogene symmetrische Polynom $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lässt sich eindeutig als Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen ausdrücken, wenn $g < n$ und m beliebig ist.

Sei $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ein homogenes Polynom vom Grad m. Beweis durch vollständige Induktion nach dem Grad m des Polynoms:

Basis: $m = 0$. In diesem Fall ist das Polynom P konstant. Es lässt sich als $cp_0 = c$ für ein entsprechendes c schreiben und ist so durch ein Polynom von p_0 ausdrückbar. Induktionsannahme: Alle Polynome mit einem Grad kleiner als m lassen sich als Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen ausdrücken.

Für jedes Monom $x_1^{g_1} x_2^{g_2} \cdots x_n^{g_n}$ gibt es ein größtes $k \in \mathbb{N}$, sodass $p_n^k \mid x_1^{g_1} x_2^{g_2} \cdots x_n^{g_n}$. Es ist $k = min(g_1, g_2, \ldots, g_n)$, da $p_n = \prod_{g=1}^{n} x_g$. Wir schreiben $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ als Polynom von p_n:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{h=0}^{\infty} r_h p_n^h = r_0 + r_1 p_n + r_2 p_n^2 + \ldots$$

Dabei ist kein Monom in den (symmetrischen) Polynomen $r_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $r_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots$ durch p_n teilbar. Weil $\deg(P(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = m$ ist, folgt

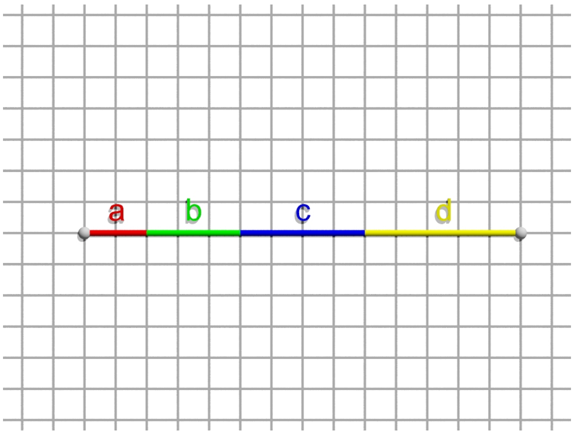

Abbildung 2.1: Graphische Veranschaulichung von p_1

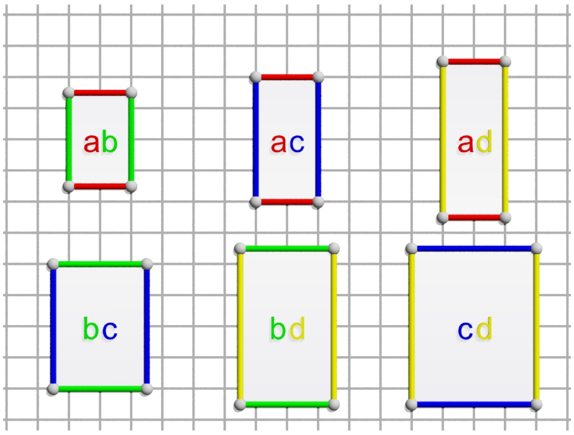

Abbildung 2.2: Graphische Veranschaulichung von p_2

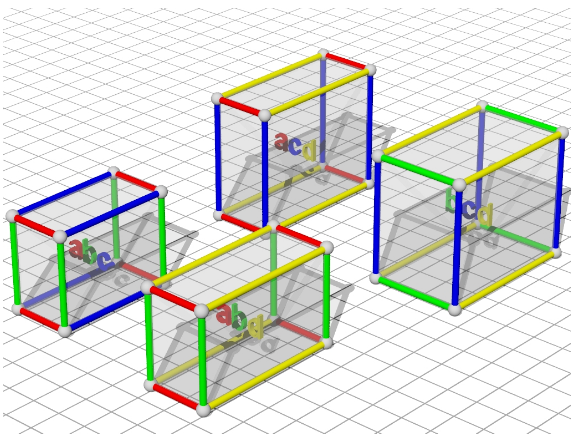

Abbildung 2.3: Graphische Veranschaulichung von p_3

$\deg(r_g(x_1, x_2, \ldots, x_n)) < m$ für alle $g \geq 1$. Für diese Polynome ist laut Induktionsannahme der zu zeigende Satz erfüllt. Wir müssen 2.1.3 nur noch für $r_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zeigen.

Das Polynom $r_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist symmetrisch, homogen vom Grad m und jedes Monom von r_0 ist nicht durch p_n teilbar. Also ist auch $r_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0)$ symmetrisch in $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Laut Induktionsannahme gibt es eine eindeutige Darstellung $r_0(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) = e(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$. Wir betrachten nun die Differenz

$$D(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) - e(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})$$

Für $x_n = 0$ ist $D = 0$. Wir interpretieren D als Polynom in einer Variablen x_n. Laut Satz 1.2.4 ist das Polynom $D(x_n)$ durch $(x_n - 0) = x_n$ teilbar. Da D symmetrisch ist, können wir das Polynom D auch als Polynom in einer anderen Variable auffassen. Wir erhalten: D ist auch durch $x_1 x_2 \cdots x_n = p_n$ teilbar. Sei $\tilde{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{p_n}$. Dann ist

$$r_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = e(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}) + p_n \tilde{D}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Laut Induktionsannahme gilt der zu zeigende Satz für $\tilde{D}$. Damit gibt es sicher eine Darstellung von r_0 als Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen.

Wir müssen noch die Eindeutigkeit beweisen.

Dazu müssen wir nur zeigen, dass wenn $P \equiv 0$ ist, $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ das Nullpolynom sein muss. Wir setzen also:

$$H(p_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), p_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, p_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \equiv P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv 0$$

Wir setzen $x_n = 0$. Dann ist auch $p_n = 0$ und es ist

$$H(p_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0), p_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0), \ldots, p_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0), 0) \equiv 0$$

Laut Induktionsannahme ist $H(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, 0) \equiv 0$. Daher muss H durch p_n teilbar sein. Sei $\tilde{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{H(p_1, p_2, \ldots, p_n)}{p_n}$. Es ist

$$0 \equiv H(p_1, p_2, \ldots, p_n) \equiv p_n \tilde{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

Für $p_n \neq 0$ muss $\tilde{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$ gelten. Aus Stetigkeitsgründen muss $\tilde{H} = 0$ für $p_n = 0$ gelten. Also ist $\tilde{H}$ durch p_n teilbar.

Diesen Schritt kann man beliebig oft wiederholen. Dabei sinkt der Grad des neuen Polynoms. Wenn wir nicht vom Nullpolynom ausgegangen sind, ist ein unendlicher Abstieg unmöglich.

$\square$

Um nun tatsächlich zu bestimmen, wie sich ein symmetrisches Polynom aus elementarsymmetrischen Polynomen zusammensetzt, setzen wir allgemeine Koeffizienten an und ermitteln diese mit spezieller Variablenbelegung. Dabei muss der Grad

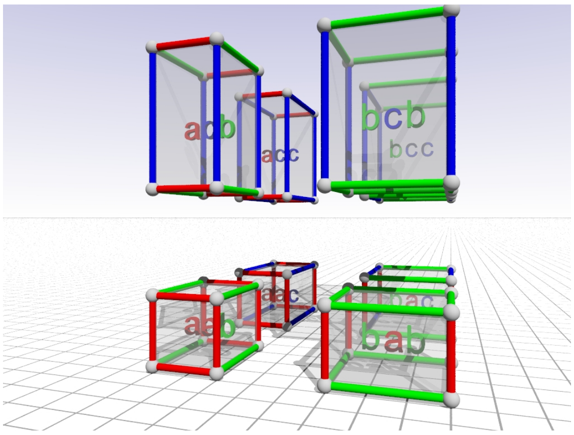

Abbildung 2.4: Graphische Veranschaulichung von $P(x) \equiv (a+b)(b+c)(c+a)$

des aus elementarsymmetrischen Ausdrücken zusammengesetzten Terms gleich dem Grad des darzustellenden Polynoms sein. Dieses Verfahren erläutern wir anhand eines Beispiels: Sei $P\left(a,b,c\right) \equiv (a+b)(b+c)(c+a)$

Dieses Polynom ist offensichtlich symmetrisch. Wie wir in der Abbildung 2.4 sehen, erhalten wir durch Ausmultiplizieren:

$$P\left(a,b,c\right) \equiv abc + aba + acc + aca + bbc + bba + bcc + bca = \left(\sum_{sym(a,b,c)} a^2 b \right) + 2abc$$

Wir wollen ein Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen finden, das mit P identisch ist. Dazu können wir die elementarsymmetrischen Polynome p_1, p_2, p_3 multiplikativ verknüpfen. Der Grad wird dabei addiert. Alle Terme in P haben den Grad 3. Daher kann sich das Polynom nur aus elementarsymmetrischen Ausdrücken dritten Grades zusammensetzen. Es sind die Möglichkeiten gefragt, die Zahl 3 als Summe von positiven ganzen Zahlen darzustellen, wobei maximal die Zahl 3 darin vorkommen darf, da wir nur drei Variablen a, b, c haben. Eine Zahl g, die wir verwenden, repräsentiert dabei p_g. Wir brauchen also die Partitionen von 3. Wie wir schon aus 1.6 wissen, hat die Zahl 3 die Partitionen $1\hat{+}1\hat{+}1$, $2\hat{+}1$, 3. Es gibt also drei Monome von elementarsymmetrischen Polynomen, die Grad drei haben: p_1^3, $p_1 p_2$, p_3.

Unser Ansatz ist daher:

$$P\left(a,b,c\right) = A p_1^3 + B p_1 p_2 + C p_3$$

In unserem Fall ist $p_1 = a + b + c$, $p_2 = ab + bc + ca$ und $p_3 = abc$.

A, B, C sind die zu bestimmenden Parameter, die Koeffizienten des Polynoms von elementarsymmetrischen Polynomen. Diese bestimmen wir mit „spezieller Variablenbelegung“. Das heißt, wir setzen für a, b, c spezielle Werte (Stellen) ein, berechnen das Polynom P, sowie das Polynom unseres Ansatzes. Wenn die zwei Polynome identisch sein sollen, müssen sie an allen Stellen übereinstimmen. So bekommen wir eine Gleichung in den Parametern A, B, C. Mit anderen Variablenbelegungen erhalten wir weitere Gleichungen, also ein lineares Gleichungssystem in A, B, C. Ist es nicht eindeutig lösbar, so brauchen wir weitere Variablenbelegungen. Laut Satz 2.1.3 gibt es ja sicher eine eindeutige Darstellung. Nach ausreichender Variablenbelegung erhalten wir somit die gewünschte Darstellung von P als Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen.

Wir setzen zum Beispiel $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ und erhalten $p_1 = 1$, $p_2 = 0$, $p_3 = 0$

$$P(1,0,0) = A = (1+0)(0+0)(0+1) = 0$$

In diesem Fall ist unsere erste Gleichung besonders einfach $A = 0$.

Wir setzen nun $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ und erhalten $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 0$

$$P(1,1,0) = 8\underbrace{A}_{=0} + 2B = (1+1)(1+0)(0+1) = 2$$

Diese Gleichung liefert uns $B = 1$.

Wir brauchen noch eine dritte Gleichung. Wir setzen $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$ und erhalten $p_1 = 3$, $p_2 = 3$, $p_3 = 1$

$$P(1,1,1) = 27\underbrace{A}_{=0} + 9\underbrace{B}_{=1} + C = (1+1)(1+1)(1+1) = 8$$

Wir erhalten $C = -1$.

Wir haben also die Darstellung von P in elementarsymmetrischen Polynomen gefunden:

$$P(a,b,c) \equiv (a+b)(b+c)(c+a) \equiv p_1 p_2 - p_3 \equiv (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$$

Machen wir nun die Probe, indem wir beide Seiten ausmultiplizieren.

$$abc + aba + acc + aca + bbc + bba + bcc + bca = aab + abc + aca + bab + bbc + bca + cab + cbc + cca - abc$$

In einigen speziellen Fällen ist es auch möglich, die Darstellung durch reines algebraisches Umformen zu bestimmen. Beispielsweise ist

$$(x-y)^2 \equiv x^2 - 2xy + y^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \equiv (x+y)^2 - 4xy \equiv p_1^2 - 4p_2$$

Durch eine geschickte Substitution ist es sogar möglich, die Darstellung des Polynoms $P(a,b,c) \equiv (a+b)(b+c)(c+a)$ algebraisch zu finden:

$$\begin{aligned} P(a,b,c) &\equiv (a+b)(b+c)(c+a) \\ &\equiv (p_1 - c)(p_1 - a)(p_1 - b) \\ &\equiv p_1^3 - \underbrace{(a+b+c)}_{p_1} p_1^2 + \underbrace{(ab+bc+ca)}_{p_2} p_1 - \underbrace{abc}_{p_3}) \\ &\equiv p_2 p_1 - p_3 \end{aligned}$$

2.2 Potenzsummen und die Newton'sche Beziehung

Nach den bisher geleisteten Vorarbeiten können wir uns nun an die zentrale Formel dieser Arbeit, nämlich die Newton'sche Beziehung heranwagen. Dazu ist vorerst die Definition der Potenzsummen hilfreich und notwendig.

Definition 2.2.1 (Potenzsummen)
Als g-te ***Potenzsumme*** *s_g in den n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen wir*

$$s_g = s_g\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{h=0}^{n} x_h^g \;\; = x_1^g + x_2^g + \cdots + x_n^g$$

Beispiel 2.2.2

$$\begin{aligned}
s_0(a,b,c,d) &= 4 \\
s_1(a,b,c,d) &= a+b+c+d \\
s_2(a,b,c,d) &= a^2+b^2+c^2+d^2 \\
s_3(a,b,c,d) &= a^3+b^3+c^3+d^3 \\
s_4(a,b,c,d) &= a^4+b^4+c^4+d^4 \\
s_5(a,b,c,d) &= a^5+b^5+c^5+d^5
\end{aligned}$$

In den nachfolgenden Abbildungen 2.5, 2.6 bzw. 2.7 auf Seite 24 sehen wir eine graphische Veranschaulichung von $p_1(a,b,c,d)$, $p_2(a,b,c,d)$ bzw. $p_3(a,b,c,d)$.

Die Potenzsummen sind offensichtlich symmetrische und homogene Polynome mit $\deg(s_g) = g$.

Aufgrund des bereits bewiesenen **Hauptsatzes über symmetrische Polynome** 2.1.3 müssen sich die Potenzsummen jedenfalls aus elementarsymmetrischen Polynomen ausdrücken lassen.

Satz 2.2.3 (Newton'sche Beziehung)

$$\sum_{g=0}^{n} s_g p_{n-g} (-1)^g \equiv 0$$

Wir zeigen diese zentrale Behauptung anhand zweier Beweise.
Beweis 1. (vgl. [15])
Wir betrachten das Polynom

$$P(x) \equiv \prod_{g=1}^{n} (1 + v_g x)$$

und multiplizieren aus. Dadurch erhalten wir:

$$P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} p_g(v_1, v_2, \ldots, v_n) x^g$$

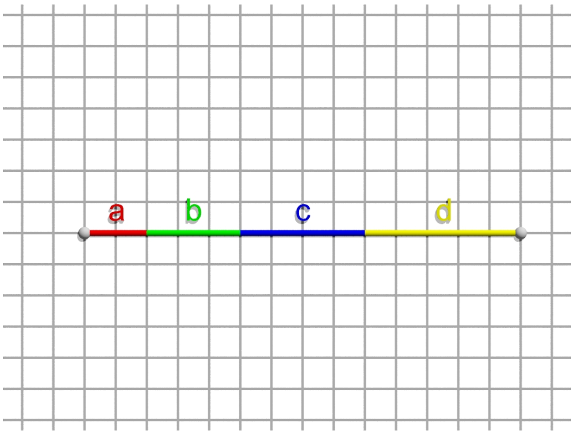

Abbildung 2.5: Graphische Veranschaulichung von s_1

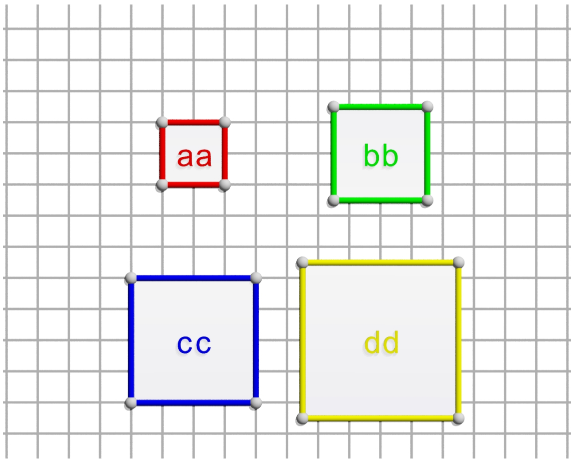

Abbildung 2.6: Graphische Veranschaulichung von s_2

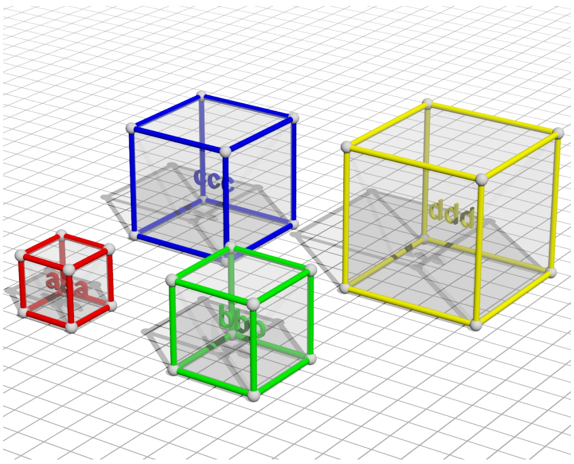

Abbildung 2.7: Graphische Veranschaulichung von s_3

Sei $P'(x)$ die erste Ableitung von P nach x. Wir betrachten nun $\frac{P'(x)}{P(x)}$, wobei wir P' nach der Produktregel berechnen:

$$\frac{v_1(1+v_2x)\cdots(1+v_nx)+(1+v_1x)v_2\cdots(1+v_nx)+\ldots+(1+v_1x)(1+v_2x)\cdots v_n}{\prod_{g=1}^{n}(1+v_gx)}=$$

$$=\sum_{g=1}^{n}\frac{v_g}{1+v_gx}=\sum_{g=1}^{n}v_g\frac{1}{1+v_gx}=\frac{P'(x)}{P(x)}$$

Falls alle Variablen $v_1, v_2, \ldots, v_n$ Null sind, so ist die Newton'sche Beziehung offensichtlich richtig. Ansonsten betrachten wir ab jetzt P nur auf dem Intervall $\left]-\frac{1}{\max(|v_1|,|v_2|,\ldots,|v_n|)}, \frac{1}{\max(|v_1|,|v_2|,\ldots,|v_n|)}\right[$

Die Ausdrücke $\frac{1}{1+v_gx}$ können wir jeweils als geometrische Reihe auffassen, da $|v_gx| = |v_g||x| < \max(|v_1|,|v_2|,\ldots,|v_n|)\frac{1}{\max(|v_1|,|v_2|,\ldots,|v_n|)} = 1$ und erhalten:

$$\frac{1}{1+v_gx}=\sum_{h=0}^{\infty}(-v_gx)^h$$

Also ist

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{g=1}^{n}\left(v_g\sum_{h=0}^{\infty}(-v_gx)^h\right)=$$

$$v_1(1-v_1x+v_1^2x^2-v_1^3x^3+\ldots)+v_2(1-v_2x+v_2^2x^2-v_2^3x^3+\ldots)+\ldots+v_n(1-v_nx+v_n^2x^2-v_n^3x^3+\ldots)$$

Dieser Ausdruck ist eine Potenzreihe in x. Da die Reihe absolut konvergent ist, können wir die Summe beliebig umordnen. Eine sinnvolle Ordnung ist die Ordnung nach dem Exponenten bei x.

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{h=0}^{\infty}\left((-x)^g\underbrace{\sum_{g=1}^{n}v_h^{g+1}}_{s_{g+1}}\right)=$$

$$(1+1+\ldots+1)-x(v_1+v_2+\ldots v_n)+x^2(v_1^2+v_2^2+\ldots+v_n^2)-x^3(v_1^3+v_2^3+\ldots+v_n^3)+\ldots$$

In der Summenform ist $P'(x)=\sum_{g=0}^{n-1}(g+1)p_{g+1}(v_1,v_2,\ldots,v_n)x^g$. Also ist

$$\frac{\sum_{g=0}^{n-1}(g+1)p_{g+1}(v_1,v_2,\ldots,v_n)x^g}{\sum_{g=0}^{n}p_g(v_1,v_2,\ldots,v_n)x^g}=\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{g=1}^{\infty}\left((-x)^gs_{g+1}\right)$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir

$$\sum_{g=0}^{n-1}(g+1)p_{g+1}(v_1,v_2,\ldots,v_n)x^g=\left(\sum_{g=0}^{\infty}\left((-x)^gs_{g+1}\right)\right)\left(\sum_{g=0}^{n}p_g(v_1,v_2,\ldots,v_n)x^g\right)=$$

$$\left(s_1 - xs_2 + x^2 s_3 - x^3 s_4 + \ldots\right)\left(p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \ldots\right)$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$\begin{aligned}
x^0 : \quad & \underbrace{1}_{s_0} p_1 = s_1 \underbrace{p_0}_{=1} \\
x^1 : \quad & \underbrace{2}_{s_0} p_2 = s_1 p_1 - s_2 \underbrace{p_0}_{=1} \\
x^2 : \quad & \underbrace{3}_{s_0} p_3 = s_1 p_2 - s_2 p_1 + s_3 \underbrace{p_0}_{=1} \\
& \vdots \\
x^n : \quad & \underbrace{n}_{s_0} p_n = \textstyle\sum_{g=1}^{n} s_g p_{n-g} (-1)^{g+1}
\end{aligned}$$

Bringen wir alle Terme auf die rechte Seite, so folgt

$$x^h : 0 = \sum_{g=0}^{h} s_g p_{h-g} (-1)^{g+1}$$

für alle h, die größer oder gleich Null und kleiner oder gleich n sind. Da es unendlich viele Stellen (also sicher mehr als n) im Intervall $\left]-\frac{1}{\max(|v_1|,|v_2|,\ldots,|v_n|)}, \frac{1}{\max(|v_1|,|v_2|,\ldots,|v_n|)}\right[$ gibt, für die die Newton'sche Beziehung also gilt, so muss sie für alle Stellen gelten.

Wir haben die Gleichheit für unendlich viele Stellen gezeigt. Aufgrund von Satz 1.4.2 muss somit tatsächlich Identität gelten.

□

Beweis 2. (vgl. [4], S. 50 ff)
Zuerst beweisen wir die Newton'sche Beziehung für $g = n$. Wir betrachten das Polynom

$$P(x) \equiv \prod_{g=1}^{n} (x - a_g) \equiv (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

Durch Ausmultiplizieren erhalten wir:

$$P(x) \equiv \sum_{g=0}^{n} x^g p_{n-g} (-1)^{n-g}$$

In der Produktform sehen wir, dass $P(a_1) \equiv P(a_2) \equiv \ldots \equiv P(a_n) \equiv 0$. Also ist

$$\sum_{g=1}^{n} P(a_g) \equiv 0 \equiv \sum_{h=0}^{n} \sum_{g=0}^{n} a_h^g p_{n-g} (-1)^{n-g} \equiv$$

$$\equiv \sum_{g=0}^{n} \sum_{h=0}^{n} a_h^g p_{n-g} (-1)^{n-g} \equiv \sum_{g=0}^{n} p_{n-g} (-1)^{n-g} \underbrace{\sum_{h=0}^{n} a_h^g}_{s_g}$$

Wenn $g < n$ ist, so setzen wir $n - g$ Variablen in der bereits bewiesenen Form der Newton'schen Beziehung Null und erhalten die Aussage der Newton'schen Beziehung. Für $g > n$ brauchen wir einen Induktionsbeweis. Induktionsbasis ist die Newton'sche Beziehung für bis zu n Variablen, die wir bereits bewiesen haben.

Induktionsannahme: Die Formel $\sum_{g=0}^{n} s_g p_{n-g}(-1)^g \equiv 0$ gilt für m Variablen.

Induktionsbehauptung: Die Formel $\sum_{g=0}^{n} s_g p_{n-g}(-1)^g \equiv 0$ gilt auch für $m+1$ Variablen.

Sei $P(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}) \equiv \sum_{g=0}^{n} s_g p_{n-g}(-1)^g$. Der Grad des Polynoms P ist maximal m.

Wenn wir die Variable $x_m = 0$ setzen, gilt laut Induktionsannahme folgende Identität: $P(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0) \equiv 0$. Es ist $x_{m+1} = (x_{m+1} - 0)$ eine Nullstelle des Polynoms P. Laut Satz 1.2.4 ist das Polynom durch x_{m+1} teilbar. Da P symmetrisch ist, ist P auch durch $x_1, x_2, \ldots, x_m$, und damit sogar durch $x_1 x_2 \cdots x_{m+1}$ teilbar. Der Grad dieses Produkts ist $m+1$. Da der Grad von P höchstens m ist, muss $P \equiv 0$ gelten.

□

Mit der Newton'schen Beziehung können wir nun rekursiv die Darstellung von s_n berechnen. Wir wollen das für s_2, s_3, s_4, s_5, s_6 durchführen. Wir wissen bereits, dass $s_1 = \sum_{g=1}^{n} x_g = p_1$ gilt. Siehe dazu auch Abbildung 2.5 auf Seite 24 und Abbildung 2.1 auf Seite 19. Wir formen zunächst die Newton'sche Beziehung geeignet um: $s_n = \sum_{g=1}^{n} p_g s_{n-g}(-1)^{n+1} = p_1 s_{n-1} - p_2 s_{n-2} + p_3 s_{n-3} - + \ldots p_n s_0$ mit $s_0 = n$

Wir führen eine Schreibweise ein:

Schreibweise 2.2.4 ([F])
Wir schreiben für den Koeffizienten bei $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ in der entsprechenden Potenzsumme s_n:

$$\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$$

Das ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$. Wir definieren daher $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k) = 0$ wenn $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \nsubseteq \mathbb{N}$.

Da jedes p_g den Grad g hat und $\deg(s_n) = n$ *gilt, ist*

$$n = \deg(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}) = \deg\left(\sum_{g=1}^{k} g a_g\right)$$

Wenn für einen Index h gilt $a_g = 0 \ \forall g > h$, wollen wir statt $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k) = \mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_h|0|0|\ldots|0)$ auch $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_h)$ schreiben.

Weiters definieren wir

Definition 2.2.5 (Parametersumme, [F])
*Wir nennen $\mathbf{A} = \sum_{g=1}^{k} a_g = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ die **Parametersumme** von $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$.*

Wir wollen nun die Koeffizienten $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$ berechnen. Das können wir rekursiv über die Newton'sche Beziehung tun. Wir führen die Berechnung mittels eines tabellarischen Schemas durch, siehe auch Tabellen 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 und 2.5 auf Seite 29. In der ersten Zeile tragen wir lexikographisch die Bezeichnung der Koeffizienten ein, die in s_n auftreten. Einer Partition $\underbrace{1\hat{+}1\hat{+}\ldots\hat{+}1}_{a_1 \text{ viele}}\hat{+}\underbrace{2\hat{+}2\hat{+}\ldots\hat{+}2}_{a_2 \text{ viele}}\hat{+}\ldots\hat{+}\underbrace{k\hat{+}k\hat{+}\ldots\hat{+}k}_{a_k \text{ viele}}$ entspricht $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$. In die erste Spalte schreiben wir die Produkte p_1s_{n-1}, p_2s_{n-2}, p_3s_{n-3}, $\ldots$, p_ns_0. Nun führen wir folgende Operation mit jeder Zeile durch: In der Zeile mit p_gs_{n-g} schreiben wir die Koeffizienten von s_{n-g} in jene Spalten, in denen p_g vorkommt, also dort wo $a_g \neq 0$ in $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$ gilt. Die restlichen Spalten dieser Zeile bleiben leer. Wenn wir die lexikographische Ordnung beibehalten, werden wir die Koeffizienten der uns schon bekannten Summen s_{n-g} nur abschreiben müssen. Nachdem wir mit jeder Zeile so verfahren sind, bilden wir die Summe jeder Spalte und erhalten dadurch die Koeffizienten in s_n.

Die Farben in den Tabellen sollen uns vorerst nicht irritieren, sie bekommen im Abschnitt 2.3 eine Bedeutung.

Wir erhalten laut Tabellen 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 und 2.5 auf Seite 29:

$$
\begin{aligned}
s_2 &\equiv p_1^2 - 2p_2 \\
s_3 &\equiv p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 \\
s_4 &\equiv p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3 - 4p_4 \\
s_5 &\equiv p_1^5 - 5p_1^3p_2 + 5p_1p_2^2 + 5p_1^2p_3 - 5p_2p_3 - 5p_1p_4 + 5p_5 \\
s_6 &\equiv p_1^6 - 6p_1^4p_2 + 9p_1^2p_2^2 - 2p_2^3 + 6p_1^3p_3 - 12p_1p_2p_3 + 3p_3^2 - 6p_1^2p_4 + 6p_2p_4 + 6p_1p_5 - 6p_6
\end{aligned}
$$

In Abbildung 2.8 sehen wir eine graphische Darstellung von p_1^2. Wir sehen, dass sich dieses Quadrat aus $s_2 + 2p_2$ zusammensetzt.

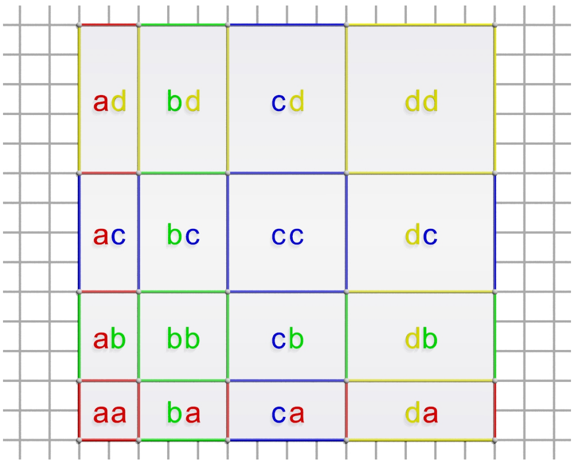

Abbildung 2.8: Graphische Veranschaulichung von p_1^2

Das große Ziel dieser Arbeit besteht darin, dass wir $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$ allgemein bestimmen.

Tabelle 2.1: Rekursive Berechnung von s_2

	$\mathbf{K}(2)$	$\mathbf{K}(0\|1)$
$p_1 s_1$	1	
$-p_2 s_0$		-2
s_2	1	-2

Tabelle 2.2: Rekursive Berechnung von s_3

	$\mathbf{K}(3)$	$\mathbf{K}(1\|1)$	$\mathbf{K}(0\|0\|1)$
$p_1 s_2$	1	-2	
$-p_2 s_1$		-1	
$p_3 s_0$			3
s_3	1	-3	3

Tabelle 2.3: Rekursive Berechnung von s_4

	$\mathbf{K}(4)$	$\mathbf{K}(2\|1)$	$\mathbf{K}(0\|2)$	$\mathbf{K}(1\|0\|1)$	$\mathbf{K}(0\|0\|0\|1)$
$p_1 s_3$	1	-3		3	
$-p_2 s_2$		-1	2		
$p_3 s_1$				1	
$-p_4 s_0$					-4
s_4	1	-4	2	4	-4

Tabelle 2.4: Rekursive Berechnung von s_5

	$\mathbf{K}(5)$	$\mathbf{K}(3\|1)$	$\mathbf{K}(1\|2)$	$\mathbf{K}(2\|0\|1)$	$\mathbf{K}(0\|1\|1)$	$\mathbf{K}(1\|0\|0\|1)$	$\mathbf{K}(0\|0\|0\|0\|1)$
$p_1 s_4$	1	-4	2	4		-4	
$-p_2 s_3$		-1	3		-3		
$p_3 s_2$				1	-2		
$-p_4 s_1$						-1	
$p_5 s_0$							5
s_5	1	-5	5	5	-5	-5	5

Tabelle 2.5: Rekursive Berechnung von s_6

	$\mathbf{K}(6)$	$\mathbf{K}(4\|1)$	$\mathbf{K}(2\|2)$	$\mathbf{K}(0\|3)$	$\mathbf{K}(3\|0\|1)$	$\mathbf{K}(1\|1\|1)$	$\mathbf{K}(0\|0\|2)$	$\mathbf{K}(2\|0\|0\|1)$	$\mathbf{K}(0\|1\|0\|1)$	$\mathbf{K}(1\|0\|0\|0\|1)$	$\mathbf{K}(0\|0\|0\|0\|0\|1)$
$p_1 s_5$	1	-5	5		5	$\underline{-5}$		-5		5	
$-p_2 s_4$		-1	4	-2		$\underline{-4}$			4		
$p_3 s_3$					1	$\underline{-3}$	3				
$-p_4 s_2$								-1	2		
$p_5 s_1$										1	
$-p_6 s_0$											-6
s_6	1	-6	9	-2	6	$\underline{-12}$	3	-6	6	6	-6

Betrachten wir zunächst die Berechnung eines Koeffizienten anhand eines Beispiels. Wie wir in Tabelle 2.5 an den unterstrichenen Zahlen sehen, errechnet sich der Koeffizient bei $p_1p_2p_3$ in s_6 folgendermaßen:

$$\underbrace{\mathbf{K}(1|1|1)}_{-12} = \underbrace{\mathbf{K}(0|1|1)}_{-5} - \underbrace{\mathbf{K}(1|0|1)}_{4} + \underbrace{\mathbf{K}(1|1|0)}_{-3}$$

Dies lässt uns folgendes vermuten:

Lemma 2.2.6 ([F])

$$\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k) = \sum_{g=1}^{k} \mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_{g-1}|a_g-1|a_{g+1}|\dots|a_k)(-1)^{g+1} =$$

$$= \mathbf{K}(a_1-1|a_2|\dots|a_k) - \mathbf{K}(a_1|a_2-1|\dots|a_k) + - \dots \mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k-1)$$

Beweis. ([F])
Beweisen können wir das Lemma, indem wir einen Koeffizientenvergleich bei $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ in der Newton'schen Beziehung $s_n = \sum_{g=1}^{n} p_g s_{n-g}(-1)^{g+1}$ machen. Der Koeffizient bei $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ in s_n ist laut Definition $\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k)$. Um in den Summanden $p_g s_{n-g}$ die Potenz $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$ zu erreichen, muss die Potenz in s_g gleich $p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_{g-1}^{a_{g-1}}p_g^{a_g-1}p_{g+1}^{a_{g+1}}\cdots p_k^{a_k}$ sein.
Der Koeffizient ist laut Definition $\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_{g-1}|a_g-1|a_{g+1}|\dots|a_k)$. Den Vorzeichenwechsel erhalten wir durch $(-1)^{g+1}$ in der Newton'schen Beziehung.

Weiters wird uns vielleicht auffallen, dass wir in den Tabellen immer nur Zahlen mit gleichen Vorzeichen zusammenzählen. In unseren Tabellen ist das Vorzeichen nur von der Parität der Summe der Potenzen der geraden elementarsymmetrischen Polynomen $a_2 + a_4 + a_6$ abhängig. Dies lässt uns folgendes Lemma vermuten:

Lemma 2.2.7 (Vorzeichenregel, [F] & Prof. Mag. H. J. Gstöttner in Raach)

$$\operatorname{sgn}(\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k)) = (-1)^{a_2+a_4+a_6+\dots}$$

$$|\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k)| = \sum_{g=1}^{k} |\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_{g-1}|a_g-1|a_{g+1}|\dots|a_k)| =$$

$$= |\mathbf{K}(a_1-1|a_2|\dots|a_k)| + |\mathbf{K}(a_1|a_2-1|\dots|a_k)| + \dots + |\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k-1)|$$

Beweis durch vollständige Induktion. ([F])
Induktionsbasis: Siehe Tabellen 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 und 2.5 auf Seite 29

Induktionsannahme: $\operatorname{sgn}(\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k)) = (-1)^{a_2+a_4+a_6+\dots}$ gilt für $s_0, s_1, \dots s_n$

Induktionsbehauptung: $\operatorname{sgn}(\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k)) = (-1)^{a_2+a_4+a_6+\dots}$ gilt auch für s_{n+1}

Laut 2.2.6 ist

$$\mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k) = \mathbf{K}(a_1-1|a_2|\dots|a_k) - \mathbf{K}(a_1|a_2-1|\dots|a_k) + - \dots \mathbf{K}(a_1|a_2|\dots|a_k-1)$$

Wenn $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ gerade ist, so ist $\mathbf{K}(a_1 - 1|a_2|a_3|\ldots|a_k) > 0$, $\mathbf{K}(a_1|a_2 - 1|a_3|\ldots|a_k) < 0$, $\mathbf{K}(a_1|a_2|a_3 - 1|\ldots|a_k) > 0, \ldots$
Wenn $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots$ ungerade ist, so ist $\mathbf{K}(a_1 - 1|a_2|a_3|\ldots|a_k) < 0$, $\mathbf{K}(a_1|a_2 - 1|a_3|\ldots|a_k) > 0$, $\mathbf{K}(a_1|a_2|a_3 - 1|\ldots|a_k) < 0, \ldots$

Damit haben alle Summanden der Summe

$$\sum_{g=1}^{k} \mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_{g-1}|a_g - 1|a_{g+1}|\ldots|a_k)(-1)^{g+1}$$

gleiches Vorzeichen, das gleich ist wie das Vorzeichen von $\mathbf{K}(a_1 - 1|a_2|a_3|\ldots|a_k)$. Also gilt die Formel auch für s_{n+1}.

□

Nun wollen wir das Vorzeichen nicht mehr betrachten und mit den Beträgen der Koeffizienten arbeiten, da wir das Vorzeichen schon kennen.

Aus den Tabellen können wir lesen, dass

$$\begin{array}{lcl} |\mathbf{K}(1)| & = & 1 \\ |\mathbf{K}(0|1)| & = & 2 \\ |\mathbf{K}(0|0|1)| & = & 3 \\ |\mathbf{K}(0|0|0|1)| & = & 4 \\ |\mathbf{K}(0|0|0|0|1)| & = & 5 \\ |\mathbf{K}(0|0|0|0|0|1)| & = & 6 \end{array}$$

Dies lässt uns folgendes vermuten:

Lemma 2.2.8 ([F])

$$\left|\mathbf{K}(\underbrace{0|0|\ldots|0}_{n-1\ \text{Nullen}}|1)\right| = n$$

Beweis. ([F])
Wir machen einen Koeffizientenvergleich bei p_n in $s_n = \sum_{g=1}^{n} p_g s_{n-g}(-1)^{n+1}$. In s_h mit $h < n$ kommt p_n sicher nicht vor, weil $(\deg(s_h) < \deg(p_n))$. Daher kann p_n nur mehr in s_n und in $p_n s_0$ vorkommen. Da $s_0 = n$, erhalten wir das zu zeigende Lemma.

□

Wir verwenden nun die Formel aus Lemma 2.2.6.

$$|\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)| = |\mathbf{K}(a_1 - 1|a_2|\ldots|a_k)| + |\mathbf{K}(a_1|a_2 - 1|\ldots|a_k)| + \ldots + |\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k - 1)|$$

Damit drücken wir einen Koeffizienten mit Parametersumme $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ durch Koeffizienten mit Parametersumme $a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1$ aus. Diesen Schritt wiederholen wir so oft, bis wir nur noch Koeffizienten mit Parametersumme 1 haben. Koeffizienten mit Parametersumme 1 kennen wir laut 2.2.8. Wir müssen nur noch abzählen, wie viele der Koeffizienten $\mathbf{K}(1), \mathbf{K}(0|1), \ldots, \mathbf{K}(\underbrace{0|0|\ldots|0}_{k-1 \text{ Nullen}}|1)$ auftreten. Um von $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k - 1)$ auf $\mathbf{K}(1)$ zu kommen, muss der erste Parameter $a_1 - 1$ Mal verringert werden, der zweite a_2 Mal usw. und der letzte a_k Mal. Wir suchen also die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen. Diese wird durch den Multinomialkoeffizienten

$$\binom{a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1}{a_1 - 1, a_2, \ldots, a_k}$$

berechnet. (Vgl. [14]) Analog kommt $\mathbf{K}(0|1)$ genau

$$\binom{a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1}{a_1, a_2 - 1, \ldots, a_k}$$

Mal vor, usw. und $\mathbf{K}(\underbrace{0|0|\ldots|0}_{k-1 \text{ Nullen}}|1)$ kommt

$$\binom{a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1}{a_1, a_2, \ldots, a_k - 1}$$

Mal vor.

Betrachten wir wieder die Berechnung von $|\mathbf{K}(1|1|1)|$, die wir oben begonnen haben.

$$|\mathbf{K}(1|1|1)| = |\mathbf{K}(0|1|1)| + |\mathbf{K}(1|0|1)| + |\mathbf{K}(1|1|0)| =$$

$$|\mathbf{K}(0|0|1)| + |\mathbf{K}(0|1)| + |\mathbf{K}(0|0|1)| + |\mathbf{K}(1)| + |\mathbf{K}(0|1)| + |\mathbf{K}(1)| = 3+2+3+1+2+1 = 12$$

Die Koeffizienten $|\mathbf{K}(1)|$, $|\mathbf{K}(0|1)|$ und $|\mathbf{K}(0|0|1)|$ kommen alle genau zwei Mal vor, da

$$\binom{2}{0,1,1} = \binom{2}{1,0,1} = \binom{2}{1,1,0} = 2$$

Man vergleiche dies mit dem Unterstrichenen in Tabelle 2.5 auf Seite 29.

Es gilt also folgende Formel:

Lemma 2.2.9 ([F])

$$|\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)| = \sum_{g=0}^{k} g \binom{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{a_1, a_2, \ldots, a_{g-1}, a_g - 1, a_{g+1}, \ldots, a_k}$$

Diese Formel wollen wir noch etwas umformen:

$$|\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)| = \sum_{g=0}^{k} g \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1)!}{a_1!a_2!\cdots a_{g-1}!(a_g - 1)!a_{g+1}!\cdots a_k!} =$$

$$= \sum_{g=0}^{k} \frac{g a_g (a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1)!}{a_1!a_2!\cdots a_k!} =$$

$$= \frac{\sum_{g=0}^{k} g a_g (a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1)!}{a_1! a_2! \cdots a_k!} =$$

$$= \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1)! \overbrace{\sum_{g=0}^{k} g a_g}^{n}}{a_1! a_2! \cdots a_k!}$$

Wenn wir diese Formel mit der Vorzeichenregel 2.2.7 kombinieren, erhalten wir folgenden

Satz 2.2.10 (Koeffizientensatz, [F])
Der Koeffizient $\mathbb{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$ *in* s_n *errechnet sich als*

$$\mathbb{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k) = \frac{n(a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1)!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}(-1)^{a_2+a_4+a_6+\ldots} =$$

$$\frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}\begin{pmatrix} a_1 + a_2 + \ldots + a_k \\ a_1, a_2, \ldots, a_k \end{pmatrix}(-1)^{a_2+a_4+a_6+\ldots} =$$

$$\frac{n}{\mathbf{A}}\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ a_1, a_2, \ldots, a_k \end{pmatrix}(-1)^{a_2+a_4+a_6+\ldots}$$

Das Zeichen **A** bezeichnet wie in 2.2.5 die Parametersumme $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.

2.3 Spezielle Koeffizientenwerte bei den Potenzsummen

Wir werden uns jetzt mit einigen Spezialfällen befassen, in denen die Formel 2.2.10 noch einfacher wird. Wo diese vereinfachte Berechnung von s_7, s_8, s_9 und s_{10} möglich ist, ist in den Tabellen 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 und 2.5 auf Seite 29 bzw. 6.1, 6.2, 6.3 und 6.4 auf den Seiten I, II, III und IV farblich gekennzeichnet: Die entsprechenden Spalten bzw. Zeilen sind in den Tabellen mit der selben Farbe hinterlegt wie die Namen der zugehörigen bzw. betreffenden Korollare (siehe auch Anhang 6.1).

Aus der expliziten Darstellung der Koeffizienten kann man direkt folgende schöne Erkenntnisse ableiten:

Korollar 2.3.1 (Monome in einer „Variablen“, vgl. [11])

$$\left|\mathbb{K}(\underbrace{0|0|\ldots|0}_{x-1\ \text{Nullen}}|y)\right| = x \quad \forall x, y \in \mathbb{N}^*$$

Dieses Korollar meint vereinfacht ausgedrückt: Wenn wir jenen Koeffizienten bei einem Monom berechnen wollen, der Potenz eines einzigen p_x ist, so ist dieser Koeffizient $\pm x$.

Beispiel 2.3.2
Wir können einige Koeffizienten in s_{60} dadurch sehr schnell ermitteln:

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{K}(60) & = & 1 \\
\mathbf{K}(0|30) & = & 2 \\
\mathbf{K}(0|0|20) & = & 3 \\
\mathbf{K}(0|0|0|15) & = & -4 \\
\mathbf{K}(0|0|0|0|12) & = & 5 \\
\mathbf{K}(0|0|0|0|0|10) & = & 6
\end{array}$$

Korollar 2.3.3 (Eine Eins und eine beliebige weitere Zahl, vgl.[13])

$$\begin{array}{lcl}
\left|\mathbf{K}(\underbrace{0|0|\ldots|0}_{beliebig\ viele}|1|\underbrace{0|0|\ldots|0}_{beliebig\ viele}|y)\right| & = & n \\
\left|\mathbf{K}(\underbrace{0|0|\ldots|0}_{beliebig\ viele}|y|\underbrace{0|0|\ldots|0}_{beliebig\ viele}|1)\right| & = & n
\end{array}$$

Wenn wir den Koeffizienten bei einem Monom der Gestalt $p_g p_h^y$ mit $g \neq h$ und $y \in \mathbb{N}^*$ berechnen wollen, so ist dieser durch $\pm n$ in der entsprechenden Summe s_n gegeben.

Beispiel 2.3.4

$$\begin{array}{lcccl}
in\ s_5: & |\mathbf{K}(3|1)| & = & |\mathbf{K}(1|2)| & = & 5 \\
in\ s_6: & |\mathbf{K}(4|1)| & = & |\mathbf{K}(3|0|1)| & = & 6
\end{array}$$

Korollar 2.3.5 (Umordnung bei gleicher Potenz, vgl. [13])
$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ ist eine Permutation von $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$ und $\sum_{g=1}^{k} g a_g = \sum_{g=1}^{k} g b_g \Longrightarrow$

$$|\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)| = |\mathbf{K}(b_1|b_2|\ldots|b_k)|$$

Wenn zwei Koeffizienten $\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$ und $\mathbf{K}(b_1|b_2|\ldots|b_k)$ in der gleichen Summe s_n vorkommen (dazu müssen die zugehörigen Monome gleiche Grade haben, das heißt, es gilt $\sum_{g=1}^{k} g a_g = \sum_{g=1}^{k} g b_g$), und wenn man durch Vertauschung der Exponenten der „Variablen“ p_g das eine Monom in das andere überführen kann, so sind die Koeffizienten betragsmäßig gleich.

Korollar 2.3.6 (n ist eine Primzahl, [F])

$$n \in \mathbb{P} \quad und \quad a_1 \neq n \Longrightarrow n \quad | \quad \mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$$

Wenn n eine Primzahl ist, so sind alle Koeffizienten, mit Ausnahme des Koeffizienten bei p_1^n, der ja laut 2.3.1 gleich 1 ist, durch n teilbar.

Beweis. ([F])

$$\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k) = \frac{n(a_1 + a_2 + \ldots + a_k - 1)!}{a_1! a_2! \cdots a_k!}(-1)^{a_2+a_4+a_6+\ldots}$$

Im Zähler steht n. Im Nenner kommt sicher n nicht vor, da $a_1, a_2, \ldots, a_k < n$ ist.

$\square$

Korollar 2.3.7 (Nur erste Potenzen, [F])

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{0,1\} \Longrightarrow |\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)| = n(\mathbf{A}-1)!$$

Wenn jedes elementarsymmetrische Polynom nur zur ersten Potenz vorkommt, dann ist der Koeffizient n Mal der Fakultät der Anzahl der elementarsymmetrischen Polynome. Die Anzahl der elementarsymmetrischen Polynome stimmt mit der Parametersumme überein, da ja jedes elementarsymmetrische Polynom nur zur ersten Potenz vorkommt.

Beweis. ([F])
Wir betrachten die Formel 2.2.10, wobei uns nur der Betrag der Koeffizienten interessiert:

$$|\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)| = \frac{n(a_1+a_2+\ldots+a_k-1)!}{a_1!a_2!\cdots a_k!}$$

Wenn alle a_g mit $1 \le g \le k$ nur die Werte Null oder Eins annehmen, so ist $a_g! = 1$. Daher gilt

$$|\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)| = n(a_1+a_2+\ldots+a_k-1)$$

Da $a_1+a_2+\ldots+a_k = \mathbf{A}$ ist, sind wir fertig.

$\square$

Korollar 2.3.8 (p_1 quadratisch, sonst nur p_2, vgl. [13])

$$\mathbf{K}(2|m) = (m+1)^2(-1)^m$$

Beweis. ([F])
Dieses Korollar folgt aus der Formel 2.2.10, wenn wir für $a_1 = 2$, $a_2 = m$ und $a_g = 0$ für alle $g > 2$ einsetzen. Wir erhalten:

$$\mathbf{K}(2|m) = \frac{n(2+m-1)!}{2!m!}(-1)^m = \frac{n(m+1)}{2}(-1)^m$$

Es ist $n = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots ka_k$, also ist in unserem Fall $n = 2+2m$. Daraus ergibt sich:

$$\mathbf{K}(2|m) = \frac{(2m+2)(m+1)}{2}(-1)^m = \frac{2(m+1)^2}{2}(-1)^m = (m+1)^2(-1)^m$$

$\square$

Beispiel 2.3.9

$$\begin{array}{rcrcl} \mathbf{K}(2|0) & = & 1 & \mathit{in} & s_2 \\ \mathbf{K}(2|1) & = & -4 & \mathit{in} & s_4 \\ \mathbf{K}(2|2) & = & 9 & \mathit{in} & s_6 \\ \mathbf{K}(2|3) & = & -16 & \mathit{in} & s_8 \\ \mathbf{K}(2|4) & = & 25 & \mathit{in} & s_{10} \end{array}$$

Korollar 2.3.10 (**p_2 quadratisch, sonst nur p_1, vgl. [13]**)

$$\mathbf{K}(m|2) = \frac{(m+1)(m+4)}{2}$$

Beweis. ([F])
Auch diese Schlussfolgerung zeigen wir durch Einsetzen in die Formel 2.2.10. Diesmal haben wir $a_1 = m$, $a_2 = 2$ und $a_g = 0$ für alle $g > 2$.

$$\mathbf{K}(m|2) = \frac{n(m+2-1)!}{m!2!}(-1)^2 = \frac{n(m+1)}{2}$$

Im Unterschied zu unserem vorherigen Ergebnis ist diesmal $n = m + 2 \cdot 2 = m + 4$. Daher gilt die zu zeigende Formel.

$\square$

Beispiel 2.3.11

$$\begin{array}{rcccll}
\mathbf{K}(0|2) & = & \frac{1\cdot 4}{2} & = & 2 & in \quad s_4 \\
\mathbf{K}(1|2) & = & \frac{2\cdot 5}{2} & = & 5 & in \quad s_5 \\
\mathbf{K}(2|2) & = & \frac{3\cdot 6}{2} & = & 9 & in \quad s_6 \\
\mathbf{K}(3|2) & = & \frac{4\cdot 7}{2} & = & 14 & in \quad s_7 \\
\mathbf{K}(4|2) & = & \frac{5\cdot 8}{2} & = & 20 & in \quad s_8 \\
\mathbf{K}(5|2) & = & \frac{6\cdot 9}{2} & = & 27 & in \quad s_9 \\
\mathbf{K}(6|2) & = & \frac{7\cdot 10}{2} & = & 35 & in \quad s_{10}
\end{array}$$

Korollar 2.3.12 (**Nur gleiche Potenzen, [F]**)

$$\left|\mathbf{K}(\underbrace{m|m|\dots|m}_{k\ Mal})\right| = \frac{(k+1)(km)!}{2(m!)^k}$$

Beweis. ([F])
Auch diese Aussage beweisen wir durch Einsetzen in die Formel 2.2.10. Es sind nun alle a_g gleich m. Also ist

$$\left|\mathbf{K}(\underbrace{m|m|\dots|m}_{k \text{ Mal}})\right| = \frac{n(m+m+\ldots+m-1)!}{m!m!\cdots m!} = \frac{n(km-1)!}{(m!)^k}$$

Zum Ziel kommen wir, indem wir n ausrechnen:

$$n = m + 2m + \ldots + km = m(1+2+3+\ldots+k) = m\frac{k(k+1)}{2}$$

Daher ist

$$\left|\mathbf{K}(\underbrace{m|m|\dots|m}_{k \text{ Mal}})\right| = \frac{m\frac{k(k+1)}{2}(km-1)!}{(m!)^k} = \frac{(k+1)km(km-1)!}{2(m!)^k} = \frac{(k+1)(km)!}{2(m!)^k}$$

$\square$

Beispiel 2.3.13

$$|\mathbb{K}(3|3)| = \frac{3 \cdot 6!}{2 \cdot 3!^2} = \frac{3 \cdot 720}{2 \cdot 36} = 30 \quad in \quad s_9$$

2.4 Ausblick: Weitere symmetrische Polynome und ihre Darstellung

Laut dem Hauptsatz über symmetrische Funktionen (2.1.3) können wir alle symmetrischen Polynome durch elementarsymmetrische ausdrücken. Gibt es eine allgemeine Formel, mit welcher wir alle symmetrischen Polynome als Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen ausdrücken können?

Nun stellt sich die Frage, welche symmetrischen Polynome es für einen Grad n gibt. Wenn wir jedes symmetrische Polynom als Linearkombination von bestimmten Polynomen ausdrücken können, von denen wir die Darstellung als elementarsymmetrische Polynome kennen, dann können wir obige Frage mit „ja“ beantworten.

Wir werden uns sinnvollerweise auf Polynome in Summenform beschränken. Kennen wir das darzustellende Polynom in Produktform, so multiplizieren wir es aus.

Wir können das untersuchte Polynom $P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ als Summe von homogenen Polynomen $P_0(x_1, x_2, \ldots, x_k) + P_1(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \ldots + P_n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ schreiben, wobei der Grad jedes Monoms von P_g gleich g ist. Daher beschränken wir uns auf homogene Polynome.

Wir betrachten nun also nur mehr ausmultiplizierte homogene symmetrische Polynome in k Variablen mit dem Grad n. Wir suchen die „kleinsten Bausteine“. Das sind also symmetrische Summen ohne Wiederholung von Monomen. Wir wollen nun für kleine Grade alle Polynome finden, die symmetrische Summen ohne Wiederholung von Monomen sind.

Beispiel 2.4.1 (Polynome vom Grad 3)
Wir finden drei „kleinste“ symmetrische Polynome vom Grad 3:

$$\begin{array}{lcll}
\sum_{sym^*(x,y,z)} xyz & \equiv & xyz & \equiv \; p_3 \\
\sum_{sym^*(x,y,z)} x^2y & \equiv & x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y & \\
\sum_{sym^*(x,y,z)} x^3 & \equiv & x^3 + y^3 + z^3 & \equiv \; s_3
\end{array}$$

Beispiel 2.4.2 (Polynome vom Grad 4)
Wir finden fünf „kleinste“ symmetrische Polynome vom Grad 4*:*

$$\begin{array}{lcll}
\sum_{sym^*(x,y,z,u)} xyzu & \equiv & xyzu & \equiv \; p_4 \\
\sum_{sym^*(x,y,z,u)} x^2yz & \equiv & x^2yz + x^2yu + x^2zu + y^2xz + y^2xu + y^2zu + & \\
 & & z^2xy + z^2xu + z^2yu + u^2xy + u^2xz + u^2yz & \\
\sum_{sym^*(x,y,z,u)} x^2y^2 & \equiv & x^2y^2 + x^2z^2 + x^2u^2 + y^2z^2 + y^2u^2 + z^2u^2 & \\
\sum_{sym^*(x,y,z,u)} x^3y & \equiv & x^3y + x^3z + x^3u + y^3x + y^3z + y^3u + & \\
 & & z^3x + z^3y + z^3u + u^3x + u^3y + u^3z & \\
\sum_{sym^*(x,y,z,u)} x^4 & \equiv & x^4 + y^4 + z^4 + u^4 & \equiv \; s_4
\end{array}$$

Wir erkennen, dass die Anzahl der „kleinsten Bausteine“ mit der Anzahl der Partitionen übereinstimmt. Einer Partition $b_1 \hat{+} b_2 \hat{+} \ldots \hat{+} b_l$ entspricht der „kleinste Baustein“ $\sum_{sym^*(x_1,x_2,\ldots,x_k)} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_l^{b_l}$.

Diese Überlegungen motivieren uns zu folgender Definition:

Definition 2.4.3 (Basissymmetrische Polynome, vgl. [12])

$$\mathrm{B}_{(b_1 \hat{+} b_2 \hat{+} \ldots \hat{+} b_l)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \sum_{sym^*(x_1,x_2,\ldots,x_k)} x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_l^{b_l}$$

mit $\deg\left(\mathrm{B}_{(b_1 \hat{+} b_2 \hat{+} \ldots \hat{+} b_l)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)\right) = b_1 + b_2 + \ldots + b_l = n$

Nun wollen wir unsere Vermutungen auf sichere Beine stellen.

Satz 2.4.4 (vgl. [12])
Jedes symmetrische Polynom lässt sich als Linearkombination von basissymmetrischen Polynomen darstellen.

Beweis. (vgl. [12])
Sei $a_{c_1,c_2,\ldots,c_l} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_l^{c_l}$ ein Monom vom Grad n des symmetrischen Polynoms P. Aus Symmetriegründen müssen die Koeffizienten $a_{c_1,c_2,\ldots,c_l}$ und $a_{d_1,d_2,\ldots,d_l}$ gleich sein, wenn $\langle d_1, d_2, \ldots, d_l \rangle$ eine beliebige Vertauschung von $\langle c_1, c_2, \ldots, c_l \rangle$ ist. All diese Monome können wir als $\mathrm{B}_{(c_1 \hat{+} c_2 \hat{+} \ldots \hat{+} c_l)}$ zusammenfassen. Die Partition $c_1 \hat{+} c_2 \hat{+} \ldots \hat{+} c_l$ müssen wir nicht unbedingt als geordnete Partition schreiben.

Diesen Schritt können wir so oft mit Monomen, die wir noch nicht zu basissymmetrischen Polynomen zusammengefasst haben, wiederholen, solange es noch welche gibt. Da ein Polynom nur endlich viele Monome hat, haben wir irgendwann alle zu basissymmetrischen Polynomen zusammengefasst.

□

Nach dieser Definition sind Potenzsummen ($P_{(n)}$) und elementarsymmetrische Polynome ($P_{(1 \hat{+} 1 \hat{+} \ldots \hat{+} 1)}$) auch basissymmetrische Polynome. Wie wir diese Polynome durch elementarsymmetrische Polynome ausdrücken, wissen wir bereits. Unser Problem beschränkt sich also nur noch auf die Darstellung von allen weiteren basissymmetrischen Polynomen als Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen. An dieser Stelle wäre es interessant, weiterzuforschen.

Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner hat bereits eine Darstellung für bestimmte basissymmetrische Polynome gefunden:

Satz 2.4.5 (vgl. [12])

$$\mathbf{B}_{(2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}\ldots\hat{+}1)}\,(x_1, x_2, \ldots, x_g) \equiv \sum_{sym^*(x_1,x_2,\ldots,x_g)} x_1^2 x_2 x_3 \cdots x_{g-1} \equiv p_1 p_{g-1} - g p_g$$

Beweis. (vgl. [12])
Setzen wir $x_g = 0$, so ist das basissymmetrische Polynom identisch zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}\ldots\hat{+}1)}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{g-1}, 0) &\equiv x_1^2 x_2 \cdots x_{g-1} + x_1 x_2^2 \cdots x_{g-1} + \ldots + x_1 x_2 \cdots x_{g-1}^2 \\ &\equiv x_1 x_2 \cdots x_{g-1} \cdot (x_1 + x_2 + \ldots + x_{g-1}) \\ &\equiv p_{g-1} p_1 \end{aligned}$$

Mit dieser Umformung haben wir $P_{(2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}\ldots\hat{+}1)}$ in $g-1$ Variablen bestimmt. Das Polynom ist vom Grad g. Es kann daher in mehreren Variablen nur ein Ausdruck der Form Cp_g für eine Konstante C dazukommen. Diese wollen wir nun mit spezieller Variablenbelegung bestimmen:

Wir setzen $x_1 = x_2 = \ldots = x_g = 1$ und erhalten:

$$\mathbf{B}_{(2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}\ldots\hat{+}1)}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{g\ \text{viele}}) = p_{g-1} p_1 + C p_g$$

Wir müssen nun bestimmen, wie viele Summanden in $P_{(2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}\ldots\hat{+}1)}$ enthalten sind. Diese sind aufgrund der Variablenbelegung alle 1. Die Potenz 0 kommt einmal vor, die Potenz 1 kommt $g-2$ Mal vor und die Potenz 2 kommt einmal vor. Die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen errechnet sich als Multinomialkoeffizient (vgl. [14])

$$\binom{g}{1, g-2, 1} = \frac{g!}{1!(g-2)!1!} = g(g-1)$$

Das elementarsymmetrische Polynom p_1 sowie p_{g-1} besteht aus g Summanden und das elementarsymmetrische Polynom p_g besteht aus nur einem Summanden. Dies führt uns zu folgender Gleichung in C:

$$g(g-1) = g \cdot g + C \cdot 1$$

Daraus folgt unmittelbar $C = -g$.

□

Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner hat auch bereits die Darstellung aller basissymmetrischen Polynome durch elementarsymmetrische bis zu Grad fünf ermittelt, was in Tabelle 6.5 im Anhang 6.1 auf Seite V nachzulesen ist.

In der besagten Tabelle sehen wir, dass viele der Koeffizienten Null sind. Je später die Partition $b_1 \hat{+} b_2 \hat{+} \ldots \hat{+} b_l$ ist, desto mehr Koeffizienten von $\mathbf{B}_{(b_1 \hat{+} b_2 \hat{+} \ldots \hat{+} b_l)}$ fallen weg. Diese Tatsache können wir durch eine geschickte spezielle Variablenbelegung beweisen.

Satz 2.4.6 ([F])
In der Darstellung des basissymmetrischen Polynoms $\mathrm{B}_{(b_1\hat{+}b_2\hat{+}\ldots\hat{+}b_l)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *als Polynom von elementarsymmetrischen Polynomen* $E(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ *sind alle Koeffizienten* $a_{e_1,e_2,\ldots,e_{l-1}}$ *bei einem Monom der Gestalt* $a_{e_1,e_2,\ldots,e_{l-1}}p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_{l-1}^{e_{l-1}}$ *mit* $e_1, e_2, \ldots, e_{l-1} \in \mathbb{N}$ *Null.*

Beispiel 2.4.7

$$\mathrm{B}_{(3\hat{+}1\hat{+}1)} \equiv \sum_{sym^*} a^3bc \equiv p_1^2p_3 - 2p_2p_3 - p_1p_4 + 5p_5$$

Die Monome, in denen nur p_1 *und* p_2 *vorkommen, also* p_1^5 *und* $p_1^3p_2$*, fallen weg.*

Beweisskizze. ([F])
Wir betrachten das basissymmetrische Polymom in $l-1$ Variablen. Das heißt, wir setzen $x_l = x_{l+1} = \ldots = x_k = 0$.
Es gilt

$$\mathrm{B}_{(b_1\hat{+}b_2\hat{+}\ldots\hat{+}b_l)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv \sum_{sym^*(x_1,x_2,\ldots,x_k)} x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_l^{b_l}$$

Jedes Monom von $B_{(b_1\hat{+}b_2\hat{+}\ldots\hat{+}b_l)}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ enthält mindestens einen Faktor Null. Daher ist

$$B_{(b_1\hat{+}b_2\hat{+}\ldots\hat{+}b_l)}(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv 0$$

Daher muss also auch

$$E(p_1, p_2, \ldots, p_l, 0, 0, \ldots, 0) \equiv E(p_1, p_2, \ldots, p_l) \equiv 0$$

gelten.

Wenn wir das Polynom E in $l-1$ Variablen betrachten, bleiben alle Monome der Gestalt $a_{e_1,e_2,\ldots,e_{l-1}}p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_{l-1}^{e_{l-1}}$ übrig. Da E das Nullpolynom ist, müssen alle Koeffizienten $a_{e_1,e_2,\ldots,e_{l-1}}$ Null sein.

$\square$

3 Anwendung der bisherigen Erkenntnisse beim Lösen ausgewählter Aufgaben

3.1 Eine erste Aufgabe (Gleichungssystem)

Diese Aufgabe stammt von einem Teilnehmer am Internationalen Mathe-Camp in Werbellinsee (vgl. [7]):

Seien $x, y, z \in \mathbb{C}$

Es sei

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x^3+y^3+z^3 &= 3 \\ x^4+y^4+z^4 &= 0 \end{aligned}$$

Man bestimme $x^{2008}+y^{2008}+z^{2008}$

Lösung mittels expliziter Berechnung:

In Anlehnung an die Lösung des Autors des Problems (vgl. [7]) „erraten“ wir, dass die dritten Einheitswurzeln $\{x, y, z\} = \{1, \zeta_3, \zeta_3^2, \}$ mit $\zeta_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ Lösungen sind. Es reicht uns, dass wir aus den Angaben p_1, p_2, p_3 berechnen und eine kubische Gleichung anschreiben können, deren Lösungen den Lösungen des Gleichungssystems entsprechen. Diese sind eindeutig. Da $\zeta_3^3 = 1$ ist, gilt

$$x^{2008}+y^{2008}+z^{2008} = 1 + \underbrace{\zeta_3^{2008}}_{\zeta_3} + \underbrace{\zeta_3^{4016}}_{\zeta_3^2} = 0$$

Lösung mittels elementarsymmetrischer Polynome:

Die Lösung des Autors dieser Fachbereichsarbeit beginnt mit folgenden Überlegungen:

$$\begin{aligned} s_1 &= & & & p_1 &= 0 \\ s_3 &= \underbrace{p_1^3 - 3p_1p_2}_{=0} + 3p_3 &= 1 &\implies & p_3 &= 1 \\ s_4 &= \underbrace{p_1^4 - 4p_1^2p_2}_{=0} + 2p_2^2 + \underbrace{4p_1p_3 - 4p_4}_{=0} &= 0 &\implies & p_2 &= 0 \end{aligned}$$

$3 \nmid 2008 \implies$ In der Darstellung von s_{2008} gibt es keinen elementarsymmetrischen Ausdruck, der nur aus p_3 besteht (der Grad wäre sonst nicht 2008). Daher muss $s_{2008} = 0$ sein.

3.2 Eine zweite Aufgabe (Potenzsummen)

Diese Aufgabe stammt vom Autor dieser Fachbereichsarbeit, der auch die unten angegebene Lösung entwickelte:

Seien $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{40}, x_{41} \in \mathbb{C}$ mit

$$s_k = \sum_{g=1}^{41} {x_g}^k = 0 \quad \text{für} \quad k = 1 \ldots 39$$

$$s_{40} = \sum_{g=1}^{41} x_g^{40} = -40 \quad \text{und} \quad s_{41} = \sum_{i=1}^{41} x_g^{41} = 41$$

Man bestimme $s_{2010} = \sum_{g=1}^{41} x_g^{2010} =?$

Lösung zur zweiten Aufgabe:

$$\begin{array}{rclcrcrcl}
s_1 & = & & & & & p_1 & = & 0 \\
s_2 & = & \underbrace{p_1^2}_{=0} -2p_2 & = & 0 & \implies & p_2 & = & 0 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
s_{39} & = & \underbrace{p_1^{39} + \ldots}_{=0} +39p_{39} & = & 0 & \implies & p_{39} & = & 0 \\
s_{40} & = & \underbrace{p_1^{40} + \ldots}_{=0} -40p_{40} & = & -40 & \implies & p_{40} & = & 1 \\
s_{41} & = & \underbrace{p_1^{41} + \ldots - 41p_1p_{40}}_{=0} +41p_{41} & = & 41 & \implies & p_{41} & = & 1
\end{array}$$

Wir interessieren uns also für jene elementarsymmetrischen Ausdrücke, die nur p_{40} und p_{41} enthalten, also Ausdrücke der Form $p_{40}^a p_{41}^b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$. Der Grad des Ausdrucks muss 2010 sein. Das heißt $40a + 41b = 2010$. Wir sehen, dass $(a, b) = (40, 10)$ eine Lösung ist. Da $\text{ggT}(40, 41) = 1$, sind alle weiteren Lösungen durch $(a, b) = (40 + 41k, 10 - 40k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wenn $k \neq 0$, so ist aber $(a, b) \notin \mathbb{N}^2$. Es gibt also nur eine Lösung.

Damit ist

$$s_{2010} = \mathbf{K}(\underbrace{0|0|\ldots|0}_{39 \text{ Nullen}}|40|10)\underbrace{p_{40}^{40}p_{41}^{10}}_{=1} =$$

$$= \frac{2010(40 + 10 - 1)!}{40!10!} = \frac{2010 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 412945582434$$

3.3 Eine dritte Aufgabe (Ungleichung)

Diese Aufgabe ist dem Bundeswettbewerb der 41. Österreichischen Mathematik-Olympiade entnommen (vgl. [6]):

Man zeige: Für alle Tripel paarweise verschiedener ganzer Zahlen x, y, z ist

$$\frac{(x-y)^7+(y-z)^7+(z-x)^7-(x-y)(y-z)(z-x)\left((x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\right)}{(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5} \geq 3$$

Wann gilt Gleichheit?

Lösung mittels elementarsymmetrischer Polynome:

Die Lösung des Autors dieser Fachbereichsarbeit beginnt mit einer Substitution: Sei $x-y=a$, $y-z=b$, $z-x=c$. Daraus ergibt sich die Nebenbedingung $a+b+c=p_1=0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.
Die zu zeigende Ungleichung wird zu:

$$\frac{a^7+b^7+c^7-abc(a^4+b^4+c^4)}{a^5+b^5+c^5} \geq 3$$

In der Schreibweise der elementarsymmetrischen Polynome und Potenzsummen ist zu zeigen:

$$\frac{s_7-p_3\cdot(s_4)}{s_5} \geq 3$$

Wir wollen nun die Potenzsummen durch elementarsymmetrische Polynome ausdrücken. Da wir die symmetrischen Polynome in nur drei Variablen betrachten, ist $p_k=0$ für $k>3$. Laut Nebenbedingung gilt $p_1=0$. Uns interessieren also lediglich noch jene Ausdrücke, die nur p_2 und p_3 enthalten. s_4 und s_5 haben wir in 2.2 in den Tabellen 2.3 und 2.4 auf Seite 29 schon berechnet:

$$s_4 = 2p_2^2$$

$$s_5 = -5p_2p_3$$

Wir müssen nun auch s_7 ausdrücken. Dabei interessieren uns nur jene Partitionen von 7, die nur 2 und 3 enthalten. Offensichtlich ist $3\hat{+}2\hat{+}2$ die einzige dieser Partitionen. Daher ist $p_2^2p_3$ der einzige Ausdruck, der nicht wegfällt. Laut Satz 2.2.10 ist

$$\mathbf{K}(0|2|1) = (-1)^2\frac{7(0+2+1-1)!}{0!2!1!} = +7$$

Daher ist

$$s_7 = 7p_2^2p_3$$

Wir haben also noch zu zeigen, dass

$$\frac{7p_2^2p_3-p_3(2p_2^2)}{-5p_2p_3} \geq 3 \Longleftrightarrow$$

$$p_2 \leq -3 \iff$$
$$ab + bc + ca \leq -3$$

Sei o.B.d.A $a \geq b \geq c$. Da $a + b + c = 0$, muss $a > 0$ und $c < 0$ gelten. Sei nun weiters o.B.d.A $b > 0$. (Wenn $b < 0$ ist, multiplizieren wir jede Variable mit (-1) und vertauschen a und c). Wir drücken nun c als $-a - b$ aus. Zu zeigen:

$$ab + b(-a-b) + a(-a-b) = ab - ab - b^2 - ab - a^2 = \underbrace{-a^2}_{\leq -1} \underbrace{-ab}_{\leq -1} \underbrace{-b^2}_{\leq -1} \leq -3$$

$\square$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $a^2 = b^2 = ab = 1$. Wenn wir wieder davon ausgehen, dass a, b, c eine beliebige Ordnung haben und auch zwei der Variablen a, b, c negativ sein können, erhalten wir durch Rücksubstitution in x, y, z, dass der Gleichheitsfall genau dann eintritt, wenn $\{x, y, z\} = \{k-1, k, k+1\}$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ ist.

3.4 Eine vierte Aufgabe (Gleichung)

Diese Aufgabe hat Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner im Jahr 2007 zum Kurswettbewerb in Vöcklabruck bzw. zum Qualifikationswettbewerb für Oberösterreich gestellt (vgl. [5]):

Die Lösungsmenge folgender Gleichung sei $\{a, b, c, d\}$:

$$(x-3)^4 + 12x^3 + 90x = 79x^2 + 53$$

Man bestimme den Wert von $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$.

Lösung der vierten Aufgabe

Die Musterlösung von Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner (vgl. [5]) besteht darin, die Gleichung zuerst zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} (x-3)^4 + 12x^3 + 90x &= 79x^2 + 53 \iff \\ x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108^x + 81 + 12x^3 + 90x - 79x^2 - 53 &= 0 \iff \\ P(x) \equiv x^4 - 25x^2 - 18x + 28 &= 0 \end{aligned}$$

Das Polynom $P(x)$ ist ein normiertes Polynom vierten Grades. Laut Satz von Vieta gilt:

$$\begin{aligned} p_1 &= a + b + c + d &&= 0 \\ p_2 &= ab + ac + ad + bc + bd + cd &&= -25 \\ p_3 &= abc + abd + acd + bcd &&= 18 \end{aligned}$$

Wie wir aus Tabelle 2.2 des Abschnitts 2.2 auf Seite 29 wissen, ist

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = s_3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3 = 0^3 - 3 \cdot 0 \cdot (-25) + 3 \cdot 18 = 54$$

4 Quellenverzeichnis

4.1 Literaturverzeichnis

[F] vom Autor Fuchs Adrian selbst verfasste Lemmata, Korollare, Sätze, Beweise, Definitionen usw.

Bücher, Skripten, Angabeblätter

[1] M. Aigner (2009). *Diskrete Mathematik*, Vieweg+Teubner Verlag: Wiesbaden

[2] T. Arens F. Hettlich, Ch. Krampfinger, U. Kockelkorn, K. Lichtenegger, H. Stachel (2008/2009). *Mathematik*, Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg

[3] E. J. Barbeau (1989). *Polynomials. Problem books in mathematics*, Springer Verlag: New York

[4] J. Cigler (1995). *Körper – Ringe – Gleichungen. Eine Einführung in die Denkweise der Algebra*, Universität Wien

[5] 38. Österreichische Mathematik-Olympiade. *Lösungen zum Kurswettbewerb für Fortgeschrittene / Qualifikationsbewerb Oberösterreich*, BRG Schloss Wagrain (22.03.2007). Aufgabe 4

[6] 41. Österreichische Mathematik-Olympiade. *Bundeswettbewerb* (02.06.2010). Teil 2, Tag 1, Aufgabe 1

Seminare und Persönliche Mitteilungen

[7] Anonymus1 (21.08.2008 bis 31.08.2008). Internationales Mathe-Camp Werbellinsee

[8] K. Czakler (12.05.2006) *Ungleichungen*. Seminarvortrag am Vorbereitungsseminar für den Bundeswettbewerb der 37. Österreichischen Mathematik-Olympiade in Raach am Hochgebirge

[9] H. J. Gstöttner (22.04.2010). E-Mail. Betreff: *Nachtrag Koeffizienten in Potenzsummen*

[10] H. J. Gstöttner (08.01.2011). E-Mail. Betreff: *Symmetrische Polynome*

[11] H. J. Gstöttner (30.12.2010). Persönliche Mitteilung

[12] H. J. Gstöttner (11.01.2011). Persönliche Mitteilung

[13] H. J. Gstöttner (12.05.2010). *Polynome*. Seminarvortrag am Vorbereitungsseminar für den Bundeswettbewerb der 41. Österreichischen Mathematik-Olympiade in Raach am Hochgebirge

[14] R. Henner (2010) *Extremalprinzip, Invariantenprinzip und Schubfachschluss*. Seminarvortrag am Vorbereitungsseminar für den Bundeswettbewerb der 41. Österreichischen Mathematik-Olympiade in Raach am Hochgebirge

Internet

[15] Anonymous2 (2010). *Newton-Identitäten*. Online im Internet:
URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Newton-Identit%C3%A4ten (08.01.2010)

[16] M. Bauer (1999/2001). *Das Horner-Schema*. Online im Internet:
URL: http://www.horner-schema.de/ (09.01.2010)

4.2 Abbildungsverzeichnis

4.3 Tabellenverzeichnis

5 Glossar

6 Anhang

6.1 Tabellen

Tabelle 6.1: Bestimmung der Koeffizienten in s_7 (verändert nach [9])

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	Bezeichnung	VZ	$\mathbb{K}$
7							$\mathbb{K}(7)$	+	1
5	1						$\mathbb{K}(5\|1)$	−	7
3	2						$\mathbb{K}(3\|2)$	+	14
1	3						$\mathbb{K}(1\|3)$	−	7
4		1					$\mathbb{K}(4\|0\|1)$	+	7
2	1	1					$\mathbb{K}(2\|1\|1)$	−	21
	2	1					$\mathbb{K}(0\|2\|1)$	+	7
1		2					$\mathbb{K}(1\|0\|2)$	+	7
3			1				$\mathbb{K}(3\|0\|0\|1)$	−	7
1	1		1				$\mathbb{K}(1\|1\|0\|1)$	+	14
		1	1				$\mathbb{K}(0\|0\|1\|1)$	−	7
2				1			$\mathbb{K}(2\|0\|0\|0\|1)$	+	7
	1			1			$\mathbb{K}(0\|1\|0\|0\|1)$	−	7
1					1		$\mathbb{K}(1\|0\|0\|0\|0\|1)$	−	7
						1	$\mathbb{K}(0\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	+	7

Tabelle 6.2: Bestimmung der Koeffizienten in s_8 (verändert nach [9])

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	Bezeichnung	VZ	$\mathbb{K}$
8								$\mathbb{K}(8)$	$+$	1
6	1							$\mathbb{K}(6\|1)$	$-$	8
4	2							$\mathbb{K}(4\|2)$	$+$	20
2	3							$\mathbb{K}(2\|3)$	$-$	16
	4							$\mathbb{K}(0\|4)$	$+$	2
5		1						$\mathbb{K}(5\|0\|1)$	$+$	8
3	1	1						$\mathbb{K}(3\|1\|1)$	$-$	32
1	2	1						$\mathbb{K}(1\|2\|1)$	$+$	24
2		2						$\mathbb{K}(2\|0\|2)$	$+$	12
	1	2						$\mathbb{K}(0\|1\|2)$	$-$	8
4			1					$\mathbb{K}(4\|0\|0\|1)$	$-$	8
2	1		1					$\mathbb{K}(2\|1\|0\|1)$	$+$	24
	2		1					$\mathbb{K}(0\|2\|0\|1)$	$-$	8
1		1	1					$\mathbb{K}(1\|0\|1\|1)$	$-$	16
			2					$\mathbb{K}(0\|0\|0\|2)$	$+$	4
3				1				$\mathbb{K}(3\|0\|0\|0\|1)$	$+$	8
1	1			1				$\mathbb{K}(1\|1\|0\|0\|1)$	$-$	16
		1		1				$\mathbb{K}(0\|0\|1\|0\|1)$	$+$	8
2					1			$\mathbb{K}(2\|0\|0\|0\|0\|1)$	$-$	8
	1				1			$\mathbb{K}(0\|1\|0\|0\|0\|1)$	$+$	8
1						1		$\mathbb{K}(1\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	$+$	8
							1	$\mathbb{K}(0\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	$-$	8

Tabelle 6.3: Bestimmung der Koeffizienten in s_9 (verändert nach [9])

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	Bezeichnung	VZ	$\mathbf{K}$
9									$\mathbf{K}(9)$	$+$	1
7	1								$\mathbf{K}(7\|1)$	$-$	9
5	2								$\mathbf{K}(5\|2)$	$+$	27
3	3								$\mathbf{K}(3\|3)$	$-$	30
1	4								$\mathbf{K}(1\|4)$	$+$	9
6		1							$\mathbf{K}(6\|0\|1)$	$+$	9
4	1	1							$\mathbf{K}(4\|1\|1)$	$-$	45
2	2	1							$\mathbf{K}(2\|2\|1)$	$+$	54
	3	1							$\mathbf{K}(0\|3\|1)$	$-$	9
3		2							$\mathbf{K}(3\|0\|2)$	$+$	18
1	1	2							$\mathbf{K}(1\|1\|2)$	$-$	27
		3							$\mathbf{K}(0\|0\|3)$	$+$	3
5			1						$\mathbf{K}(5\|0\|0\|1)$	$-$	9
3	1		1						$\mathbf{K}(3\|1\|0\|1)$	$+$	36
1	2		1						$\mathbf{K}(1\|2\|0\|1)$	$-$	27
2		1	1						$\mathbf{K}(2\|0\|1\|1)$	$-$	27
	1	1	1						$\mathbf{K}(0\|1\|1\|1)$	$+$	18
1			2						$\mathbf{K}(1\|0\|0\|2)$	$+$	9
4				1					$\mathbf{K}(4\|0\|0\|0\|1)$	$+$	9
2	1			1					$\mathbf{K}(2\|1\|0\|0\|1)$	$-$	27
	2			1					$\mathbf{K}(0\|2\|0\|0\|1)$	$+$	9
1		1		1					$\mathbf{K}(1\|0\|1\|0\|1)$	$+$	18
			1	1					$\mathbf{K}(0\|0\|0\|1\|1)$	$-$	9
3					1				$\mathbf{K}(3\|0\|0\|0\|0\|1)$	$-$	9
1	1				1				$\mathbf{K}(1\|1\|0\|0\|0\|1)$	$+$	18
		1			1				$\mathbf{K}(0\|0\|1\|0\|0\|1)$	$-$	9
2						1			$\mathbf{K}(2\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	$+$	9
	1					1			$\mathbf{K}(0\|1\|0\|0\|0\|0\|1)$	$-$	9
1							1		$\mathbf{K}(1\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	$-$	9
								1	$\mathbf{K}(0\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	$+$	9

Tabelle 6.4: Bestimmung der Koeffizienten in s_{10}

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	Bezeichnung	VZ	$\mathbf{K}$
10										$\mathbf{K}(10)$	+	1
8	1									$\mathbf{K}(8\|1)$	−	10
6	2									$\mathbf{K}(6\|2)$	+	35
4	3									$\mathbf{K}(4\|3)$	−	50
2	4									$\mathbf{K}(2\|4)$	+	25
	5									$\mathbf{K}(0\|5)$	−	2
7		1								$\mathbf{K}(7\|0\|1)$	+	10
5	1	1								$\mathbf{K}(5\|1\|1)$	−	60
3	2	1								$\mathbf{K}(3\|2\|1)$	+	100
1	3	1								$\mathbf{K}(1\|3\|1)$	−	40
4		2								$\mathbf{K}(4\|0\|2)$	+	25
2	1	2								$\mathbf{K}(2\|1\|2)$	−	60
	2	2								$\mathbf{K}(0\|2\|2)$	+	15
1		3								$\mathbf{K}(1\|0\|3)$	+	10
6			1							$\mathbf{K}(6\|0\|0\|1)$	−	10
4	1		1							$\mathbf{K}(4\|1\|0\|1)$	+	50
2	2		1							$\mathbf{K}(2\|2\|0\|1)$	−	60
	3		1							$\mathbf{K}(0\|3\|0\|1)$	+	10
3		1	1							$\mathbf{K}(3\|0\|1\|1)$	−	40
1	1	1	1							$\mathbf{K}(1\|1\|1\|1)$	+	60
		2	1							$\mathbf{K}(0\|0\|2\|1)$	−	10
2			2							$\mathbf{K}(2\|0\|0\|2)$	+	15
	1		2							$\mathbf{K}(0\|1\|0\|2)$	−	10
5				1						$\mathbf{K}(5\|0\|0\|0\|1)$	+	10
3	1			1						$\mathbf{K}(3\|1\|0\|0\|1)$	−	40
1	2			1						$\mathbf{K}(1\|2\|0\|0\|1)$	+	30
2		1		1						$\mathbf{K}(2\|0\|1\|0\|1)$	+	30
	1	1		1						$\mathbf{K}(0\|1\|1\|0\|1)$	−	20
1			1	1						$\mathbf{K}(1\|0\|0\|1\|1)$	−	20
				2						$\mathbf{K}(0\|0\|0\|0\|2)$	+	5
4					1					$\mathbf{K}(4\|0\|0\|0\|0\|1)$	−	10
2	1				1					$\mathbf{K}(2\|1\|0\|0\|0\|1)$	+	30
	2				1					$\mathbf{K}(0\|2\|0\|0\|0\|1)$	−	10
1		1			1					$\mathbf{K}(1\|0\|1\|0\|0\|1)$	−	20
			1		1					$\mathbf{K}(0\|0\|0\|1\|0\|1)$	+	10
3						1				$\mathbf{K}(3\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	+	10
1	1					1				$\mathbf{K}(1\|1\|0\|0\|0\|0\|1)$	−	20
		1				1				$\mathbf{K}(0\|0\|1\|0\|0\|0\|1)$	+	10
2							1			$\mathbf{K}(2\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	−	10
	1						1			$\mathbf{K}(0\|1\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	+	10
1								1		$\mathbf{K}(1\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	+	10
									1	$\mathbf{K}(0\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|0\|1)$	−	10

Tabelle 6.5: Bestimmung der Basissymmetrischen Polynome (verändert nach [10])

Grad 0:	$\mathrm{B}_{()}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} 1$	$\equiv$	p_0
Grad 1:	$\mathrm{B}_{(1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a$	$\equiv$	p_1
Grad 2:	$\mathrm{B}_{(1\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} ab$	$\equiv$	p_2
	$\mathrm{B}_{(2)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^2$	$\equiv$	$p_1^2 - 2p_2$
Grad 3:	$\mathrm{B}_{(1\hat{+}1\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} abc$	$\equiv$	p_3
	$\mathrm{B}_{(2\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^2b$	$\equiv$	$p_1p_2 - 3p_3$
	$\mathrm{B}_{(3)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^3$	$\equiv$	$p_1^2 - 3p_1p_2 + 3p_3$
Grad 4:	$\mathrm{B}_{(1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} abcd$	$\equiv$	p_4
	$\mathrm{B}_{(2\hat{+}1\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^2bc$	$\equiv$	$p_1p_3 - 4p_4$
	$\mathrm{B}_{(2\hat{+}2)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^2b^2$	$\equiv$	$p_2^2 - 2p_1p_3 + 2p_4$
	$\mathrm{B}_{(3\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^3b$	$\equiv$	$p_1^2p_2 - 2p_2^2 - p_1p_3 + 4p_4$
	$\mathrm{B}_{(4)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^4$	$\equiv$	$p_1^4 - 4p_1^2p_2 + 2p_2^2 + 4p_1p_3 - 4p_4$
Grad 5:	$\mathrm{B}_{(1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} abcde$	$\equiv$	p_5
	$\mathrm{B}_{(2\hat{+}1\hat{+}1\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^2bcd$	$\equiv$	$p_1p_4 - 5p_5$
	$\mathrm{B}_{(2\hat{+}2\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^2b^2c$	$\equiv$	$p_2p_3 - 3p_1p_4 + 5p_5$
	$\mathrm{B}_{(3\hat{+}1\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^3bc$	$\equiv$	$p_1^2p_3 - 2p_2p_3 - p_1p_4 + 5p_5$
	$\mathrm{B}_{(3\hat{+}2)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^3b^2$	$\equiv$	$p_1p_2^2 - 2p_1^2p_3 - p_2p_3 + 5p_1p_4 - 5p_5$
	$\mathrm{B}_{(4\hat{+}1)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^4b$	$\equiv$	$p_1^3p_2 - 3p_1p_2^2 - p_1^2p_3 + 5p_2p_3 + p_1p_4$
					$-5p_5$
	$\mathrm{B}_{(5)}$	$\equiv$	$\sum_{sym^*} a^5$	$\equiv$	$p_1^5 - 5p_1^3p_2 + 5p_1p_2^2 + 5p_1^2p_3 - 5p_2p_3$
					$-5p_1p_4 + 5p_5$

6.2 Entstehungsplan

28.09.2009	Besprechung der Grundidee und Skizzen mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
21.10.2009	Austausch von LaTeX-System MikTeX und LaTeX-Editor TEXnicCenter
30.11.2009	Abgabe eines Konzepts der Fachbereichsarbeit an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
18.01.2010	Erhalt eines Grundgerüsts der Fachbereichsarbeit von Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
22.02.2010	Abgabe eines Konzepts zu Kapitel 1 in handschriftlicher Form an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
22.03.2010	Abgabe eines Konzepts zu Kapitel 2 in handschriftlicher Form an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
26.03.2010	Abgabe eines Beweises der Newton'schen Beziehung aus der Literatur an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
08.04.2010	Besprechung mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
Juni 2010	Umstieg auf LaTeX-System Tex Live und LaTeX-Editor Winefish
August 2010	Umstieg auf LaTeX-Editor Kile
26.08.2010 bis 12.09.2010	Übertragung der handschriftlichen Konzepte in LaTeX
13.09.2010	Abgabe einer ersten ge-TeX-ten Version der Fachbereichsarbeit an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
20.09.2010	Austausch von Betriebssystem Knoppix 6.2, LaTeX-System Tex Live und LaTeX-Editor Kile
29.09.2010 12:45 bis 15:45	Besprechung der Fachbereichsarbeit mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
27. und 28.11.2010	Überarbeitung von Kapitel 1
29.11.2010	Abgabe von Kapitel 1 und eines Soll-Zeitplans an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
09.12.2010	Abgabe von Kapitel 2 und 3 an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
22.12.2010 12:15 bis 15:15	Besprechung mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
23.12.2010	Abgabe an Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner
30.12.2010 9:30 bis 12:15	Besprechung mit Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner (ohne Betreuer)
02. bis 09.01.2011	Überarbeitung
10.01.2011	Abgabe der Überarbeitung an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
11.01.2011 13:15 bis 15:00	Besprechung mit Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner und Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
14.01.2011 12:15 bis 13:00	Besprechung mit Prof. Mag. Heinrich Josef Gstöttner und Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
16.01.2011	Überarbeitung
19.01.2011	Überarbeitung

20.01.2011	Abgabe an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl und an Prof. Mag. Franz Brunner
28.01.2011 11:00 bis 11:30	Besprechung mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
30.01.2011	Überarbeitung
31.01.2011	Abgabe an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
04.02.2011 11:00 bis 11:30 und 12:15 bis 12:45	Besprechung mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
05. bis 07.02.2011	Überarbeitung
08.02.2011	Abgabe an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
08.02.2011 13:15 bis 14:15	Besprechung mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
08.02.2011	Überarbeitung
09.02.2011	Abgabe an Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
09.02.2011 12:15 bis 13:00	Finale Besprechung mit Prof. Mag. Dr. Rupert Sodl
10.02.2011	Finale Überarbeitung
11.02.2011	Abgabe an die Druckerei und nachfolgend an die Binderei

7 Erklärungen und Notationen

$\forall$
: für alle

$\exists$
: es existiert ein

$\equiv$
: Identität zweier Polynome. Diese Schreibweise ist unüblich, aber sie vermeidet Verwirrung. Die Identität wird damit anders notiert als die Gleichheit zweier Polynome an einer Stelle.

$\mathbb{N}$
: die Menge der natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Z}$
: die Menge der ganzen Zahlen $\{\ldots - 2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$
: die Menge der rationalen Zahlen

$\mathbb{R}$
: die Menge der reellen Zahlen

$\mathbb{C}$
: die Menge der komplexen Zahlen

$\mathbb{P}$
: die Menge der Primzahlen

$P : M_1 \to M_2$
: die Funktion P bildet von der Menge M_1 in die Menge M_2 ab.

M^*
: die Menge M ohne das Nullelement. So ist z.B. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$

M^+
: die Menge der positiven Elemente in M. So ist z.B. $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^*$

i
: die imaginäre Einheit

$\max(x_0, x_1, \ldots, x_n)$
: das größte Element der Menge $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$\min(x_0, x_1, \ldots, x_n)$
: das kleinste Element der Menge $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$\mathrm{sgn}(x)$
: Signum von x

$|x|$
: Betrag von x

$\subset$
: Untermenge von

$\in$
: Element von

$\cup$
: Vereinigungsmenge

$\wedge$
: logisches und

$\vee$
: logisches oder

$a|b$
: a teilt b, das heißt b ist ein Vielfaches von a

$\pm, \mp$
: Diese Zeichen stehen für zwei Aussagen in einer Zeile: Die erste Aussage bezieht sich auf das jeweils obere Zeichen, die zweite auf das jeweils untere.

$\mathbf{K}(a_1|a_2|\ldots|a_k)$
: der Koeffizient bei $p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ in der entsprechenden Summe s_n

$a_1 \hat{+} a_2 \hat{+} \ldots \hat{+} a_l$
: eine Partition der Zahl $a_1 + a_2 + \ldots + a_l$

π
: das konstante Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser eines Kreises

$P'(x)$
: die erste Ableitung von $P(x)$ nach x

$\mathbf{A}$
: Parametersumme

$\sum$
: Summe

$\prod$
: Produkt

$\sum_{g=a}^{e} X(g)$
: Diese Schreibweise bedeutet die **Summe** $X(a) + X(a+1) \ldots + X(e)$. Die ganze

Zahl g wird **Summenindex** genannt und durchläuft alle ganzen Zahlen von einschließlich $a \in \mathbb{Z}$ bis einschließlich $e \in \mathbb{Z}$. Man sagt auch, man summiert über $\{a, a+1, \ldots, e\}$. Für $a > e$ wird die **„leere Summe"** $\sum_{g=a}^{e} X(g) = 0$ gesetzt. Ersetzen wir das Zeichen $\sum$ durch $\prod$, so meinen wir das **Produkt** $X(a)X(a+1)\cdots X(e)$. Für $a > e$ weisen wir dem **„leeren Produkt"** den Wert 1 zu.

Beispiel 7.0.1

$$\sum_{g=1}^{4} g^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

$$\prod_{g=1}^{4} g^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 = 576$$

$\sum_{a \leq g,h < e; g \neq h} X(g,h)$
Hier haben wir es mit den zwei Summenindizes g und h zu tun. Wir summieren in diesem Fall über alle ganzen g und h, die den Bedingungen unter dem Summenzeichen genügen. Ersetzen wir das Zeichen $\sum$ durch $\prod$, so multiplizieren wir über alle ganzen g und h, die die Bedingungen unter dem Produktzeichen erfüllen, statt diese zu addieren. Summen und Produkte mit mehr Indizes interpretieren wir analog.

Beispiel 7.0.2

$$\sum_{1 \leq g,h < 4; g \neq h} a_g b_h = a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_1 + a_3 b_2$$

$\sum_{sym(x_1, x_2, \ldots, x_n)} X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Diese Schreibweise bedeutet die **symmetrische Summe**. Hier wird über alle symmetrischen Vertauschungen (Permutationen) von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summiert. Ersetzen wir das Zeichen $\sum$ durch $\prod$, so meinen wir das **symmetrische Produkt**.

Beispiel 7.0.3

$$\sum_{sym(x,y,z)} x^3y^2z = x^3y^2z + x^3z^2y + y^3x^2z + y^3z^2x + z^3x^2y + z^3y^2x$$

$$\prod_{sym(x,y,z)} (2x+y-z) = (2x+y-z)(2x+z-y)(2y+x-z)(2y+z-x)(2z+x-y)(2z+y-x)$$

$\sum_{sym^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)} P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Mit dieser Schreibweise meinen wir die **symmetrische Summe ohne Wiederholung**. Hier wird wie bei der symmetrischen Summe über alle Vertauschungen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ summiert, aber identische Ausdrücke (es muss P ein Polynom sein) werden nur einmal gezählt. Diese Schreibweise ist unüblich.

In dieser Arbeit ist sie aber sehr nützlich. Ersetzen wir das Zeichen $\sum$ durch $\prod$, meinen wir das **symmetrische Produkt ohne Wiederholung**.

Beispiel 7.0.4

$$\sum_{sym^*(x,y,z)} xy = xy + xz + yz$$

jedoch

$$\sum_{sym(x,y,z)} xy = xy + xz + yx + yz + zx + zy$$

$\sum_{cyc(x_1,x_2,\ldots,x_n)} X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
Diese Schreibweise meint die **zyklische Summe**:

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n) + X(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) + \ldots + X(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

Hier summieren wir nur über alle zyklischen Vertauschungen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ersetzen wir das Zeichen $\sum$ durch $\prod$, meinen wir das **zyklische Produkt**:

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_n)X(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) \cdots X(x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

.

Beispiel 7.0.5

$$\sum_{cyc(x,y,z)} xy = xy + yz + zx$$

$$\prod_{cyc(x,y,z)} (x + y) = (x + y)(y + z)(z + x)$$